电子社考研权威辅导丛书

# 小鑫考研嘚吧嘚

# 考研数学历年真题解析（数学二）

潘鑫　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

## 内 容 简 介

本书作者深入分析考研数学试题的特点和难点，对2009—2015年考研数学二的真题进行了详细的解读，力求将清晰完整的解题思路呈献给广大考生。通过自学本书，考生可以对考题难度及考点分布有一定程度的了解，并对往年真题的解题技巧和策略有全面的掌握。除此之外，书中含有大量知识点回顾和生动的讲解、举例，对培养考生独立解题思路具有重要意义。

本书配有真题讲解视频，有助于考生提高复习效率，全面掌握解题方法，最终取得优异成绩。



**图书在版编目 (CIP) 数据**

小鑫考研嘚吧嘚．考研数学历年真题解析．数学二 / 潘鑫编著．—北京：电子工业出版社，2015.8
（电子社考研权威辅导丛书）
ISBN 978-7-121-26738-3

Ⅰ．①小…　Ⅱ．①潘…　Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ．① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 160044 号

策划编辑：齐　岳
责任编辑：徐　静　齐　岳　　特约编辑：刘　凡
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱　　　邮编 100036
开　　本：787×1092　1/16　　印张：15.75　　字数：360 千字
版　　次：2015 年 8 月第 1 版
印　　次：2015 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：48.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

# 前　言

在大学四年生活接近尾声的时候，何去何从成了最引人注意的话题。在社会竞争日益激烈的今天，继续深造无疑是有志青年不约而同的选择，而其中大多数同学选择考研，所以如何在这场“战役”中夯实基础，走好每一步变得十分关键。本书是一本非常朴实的书，它毫无保留地告诉你每一道题应该怎么做，帮助你把相关知识点吃透，像一位不辞劳苦的老师一遍遍唠叨着类似问题该如何处理。细读本书，你会发现它在众多考研数学辅导书籍中独树一帜，在看似唠叨的讲解中，你会轻轻松松掌握考研数学的实战精髓。

## 本书定位

本书是一本适合自学的真题解析书，它内容详尽、语言通俗，解题步骤一步不落，在重点难点处还配有知识点回顾及视频讲解。本书的真题解析通俗易懂，不存在让考生费解的跳跃性强的解题步骤，基础薄弱的考生也能迅速看懂解析，轻松掌握知识点，实现会做题、做对题的最终效果。

真题解析书籍的优劣体现在它是“授之以渔”还是“授之以鱼”，书中每一道题的讲解都有举一反三的效果，每一个容易被忽视的细节、容易被钻空子的思维定势、容易被混淆的知识点都被详尽地阐述出来。也许有的同学不理解为什么一道选择题、填空题竟然有4页解析，其实这正体现了本书的最大特色：注重解题思路。只有全面掌握解题思路，在考场上才会游刃有余。如果踏踏实实看完本书，相信通过本书“手把手”的辅导，你会从中悟出一些解题的技巧和道理，在汲取本书的精粹之后，你便可以甩开拐杖，独立行走。

## 本书特色

1. 语言通俗

市面上的很多考研数学真题解析类书籍的叙述方式都比较晦涩拗口，虽然解题步骤看似简洁明了，但是对于紧锣密鼓准备考研的同学来说，却显得不那么体贴。考生往往需要用很长的时间去理解文字表达的意思和公式推导的步骤，这样不仅降低了复习效率，也使考生的复习情绪更加焦躁。考研辅导书最重要的特点就应该是通俗易懂，毕竟我们需要动脑筋的地方不是揣测作者的意思，而是真正把题做透、做明白。我力图把本书编写得更加

活泼生动，在解题步骤的叙述上避免一切不利于理解的障碍和歧义，希望读者在看书做题的时候能体会到和作者的互动交流，抛弃沉重的负担，轻松掌握知识。

2. 逻辑清晰

本书的编排合理，逻辑关系十分清楚。具体来讲，书中没有一处讲解是可有可无的，每一步推导、每一个细小的知识点对于解题来说都是至关重要的。当考生遇到不会做的题时，这样全面详尽的讲解会让你一下捕捉到自己知识储备的盲点，不论这个盲点有多么微小，都是阻碍你考出理想成绩的绊脚石。本书的讲解就像是多米诺骨牌：一道题被轻轻一推，一类题就都拜倒在我们脚下了。

我是一个标准的90后，痴迷于大学阶段的各种数学类课程。在本科学习阶段就利用课余时间给同学们办讲座，帮助大家顺利通过期末考试。在考研数学的实战中，我取得了近乎满分的成绩，这得益于我在平时学习和备考过程中总结的一套特有的学习方法。在读研阶段，我一边学习一边在各大考研机构授课并录制教学视频，为的是把自己的学习方法教给更多需要帮助的同学，在考研路上助他们一臂之力。

本书的编写经过了多次修改，对题目的分析也尽力达到透彻完整。谨以此书献给所有在考研路上拼搏的同学们，我相信踏实的努力和认真的态度会帮助你们取得满意的成绩。

莫道功名需百战，愿效滴水洞石穿。为有胸怀摘星志，手足协力共登攀。莫道征途路漫漫，愿效江水去不还。大势所向天地宽，终究奔涌归浩瀚。祝同学们考研成功！

潘鑫

2015年6月于北京

# 目录 CONTENTS

# 2015 年全国硕士研究生
# 入学统一考试试题及精解

## 一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 下列反常积分中收敛的是(　　)。

(A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$

(C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

**解**：本题是求收敛的反常积分。所谓收敛，指的是计算结果为一个数(而不是 ∞)。

现在就来分别计算这四个反常积分，看哪个的计算结果为一个数。

第一类反常积分及其计算方法。

第一类反常积分：如果反常积分 $\int_{\square}^{\square} f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 在积分上限处没有定义或者在积分下限处没有定义，并且在开区间(下限，上限)内的任意一点都有定义，就称这样的反常积分为第一类反常积分。

第一类反常积分的计算方法：就按照定积分的方法计算，但最终上、下限里面有一个值是无法直接代入的，只能算极限(如果是下限代入不了,就算下限的右极限(除非是无穷，那就不用分左右)，如果是上限代入不了,就算上限的左极限(除非是无穷，那就不用分左右))。

第二类反常积分及其计算方法。

第二类反常积分：如果反常积分 $\int_{\square}^{\square} f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 在积分上限处没有定义并且在积分下限处没有定义，并且在开区间(下限，上限)内的任意一点都有定义，就称这样的反常积分为第二类反常积分。

第二类反常积分的计算方法:按照如下两种方法之一解答。

方法 1:和第一类反常积分的计算方法一样,按照定积分的方法做就行了，但最终上、下限都无法直接代入，只能两个算极限(注意：算下限的极限的时候是算下限的右极限(除非

是无穷，那就不用分左右)，算上限的极限的时候是算上限的左极限(除非是无穷，那就不用分左右))。

方法 2：利用公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$，将一个积分拆解成两个积分。这样，每个积分就都是第一类反常积分了。

第三类反常积分及其计算方法。

第三类反常积分：如果反常积分 $\int_{\square}^{\square} f(x)\,\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 在开区间(下限，上限)内的任意一点都没有定义，就称这样的反常积分为第三类反常积分。

第三类反常积分的计算方法：利用公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$，将一个积分拆解成两个积分。这样，每个积分都是第一类或者第二类反常积分了。但是注意，$c$ 必须是没有定义的点。

以上就是反常积分的计算方法。有些同学可能会有这样的疑问：在高等数学教材中，反常积分分成了两类，这里为什么分成了三类呢？

这个问题很简单：教材中对反常积分的分类并不是从计算方法的角度来分类的，而上述是完全从计算方法的角度分类，所以分成了三类，每类对应不同的计算方法。

现在正式来计算四个选项中的反常积分。

先计算(A)选项中所给的反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 很明显是第一类反常积分，因为被积函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在积分上限 $+\infty$ 处没有定义(任何函数在 $+\infty$ 处都是没有定义的)，而在积分下限 2 处有定义，并且在开区间 $(2, +\infty)$ 内的每一点都有定义。

所以应该按照第一类反常积分的计算方法来计算。

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_2^{+\infty} = 2\sqrt{x}\Big|_2^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} = +\infty - 2\sqrt{2} = +\infty$$

由于计算结果不是一个数，该反常积分不收敛，所以不能选择(A)选项。

再来计算(B)选项中所给的反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$。

$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ 明显是第一类反常积分，因为被积函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在积分上限 $+\infty$ 处没有定义，而在积分下限 2 处有定义，并且在开区间 $(2, +\infty)$ 内的每一点都有定义。

按照第一类反常积分的计算方法计算。

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_2^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{2} - \frac{\ln^2 2}{2} = +\infty - \frac{\ln^2 2}{2} = +\infty$$

由于计算结果不是一个数，该反常积分不收敛，所以不能选择(B)选项。

再来计算(C)选项中所给的反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$。

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ 明显是第一类反常积分，因为被积函数 $\frac{1}{x\ln x}$ 在积分上限 $+\infty$处没有定义，而在积分下限 2 处有定义，并且在开区间 $(2,+\infty)$ 内的每一点都有定义。

按照第一类反常积分的计算方法计算。

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d(\ln x)=\ln(\ln x)\big|_2^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln(\ln x)-\ln(\ln 2)=+\infty-\ln(\ln 2)=+\infty$$

由于计算结果不是一个数，该反常积分不收敛，所以不能选择(C)选项。

最后计算(D)选项中所给的反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$。

$\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$ 明显是第一类反常积分，因为被积函数 $\frac{x}{e^x}$ 在积分上限 $+\infty$处没有定义，而在积分下限 2 处有定义，并且在开区间 $(2,+\infty)$ 内的每一点都有定义。

按照第一类反常积分的计算方法计算。

$$\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx=\int_2^{+\infty}xe^{-x}dx=-\int_2^{+\infty}xd(e^{-x})=-\left(xe^{-x}\big|_2^{+\infty}-\int_2^{+\infty}e^{-x}dx\right)=e^{-2}$$

由于计算结果是一个数，该反常积分收敛，所以应该选择(D)选项。

(2)函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　)。

(A)连续　　(B)有可去间断点

(C)有跳跃间断点　　(D)有无穷间断点

**解**：本题的解题思路是：第一步先求出 $f(x)$，第二步判断所求出的 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有无间断点以及有何种类型的间断点。

先进行第一步，即求出 $f(x)$。

情况 1：当 $x=0$ 时。

由于 $x=0$，所以 $\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 没有意义，$\lim\limits_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 没有意义，而 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$，所以 $x=0$ 不在 $f(x)$ 的定义域内。

情况 2：当 $x\neq0$ 时。

只要计算出极限 $\lim\limits_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 即可。值得注意的是，由于是“$t\to$”，所以在计算极

限的时候 $x$ 是当成常数的。

由于 $\lim\limits_{t\to0}(1+\dfrac{\sin t}{x})=1+\dfrac{\sin 0}{x}=1+0=1$, $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{x^2}{t}=\infty$, 所以 $\lim\limits_{t\to0}(1+\dfrac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}$ 属于 $1^\infty$ 型的极限计算题, 应该用该类型的解题方法来解答, 即

$$\lim_{t\to0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}=\lim_{t\to0}e^{\ln(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\ln(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{x^2}{t}\ln(1+\frac{\sin t}{x})}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{x^2\ln(1+\frac{\sin t}{x})}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{x^2\times\frac{\sin t}{x}}{t}}=e^x$$

综上所述, 有

$$f(x)=e^x\qquad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

再来进行第二步, 即判断所求出的 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有无间断点以及有何种类型的间断点。

由于 $f(x)=e^x\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点。

又因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1$, 也就是说左右极限存在且相等, 所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点。本题应该选择(B)选项。

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}, & x>0\\ 0, & x\leqslant0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$, 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续则(　　)。

(A) $\alpha-\beta>1$　　　　(B) $0<\alpha-\beta\leqslant1$

(C) $\alpha-\beta>2$　　　　(D) $0<\alpha-\beta\leqslant2$

**解:** 先来求函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$。

把函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}, & x>0\\ 0, & x\leqslant0\end{cases}$ 改写为 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}, & x>0\\ 0, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$

对于 $x>0$ 和 $x<0$, 通过公式来求导函数(因为这两段不是分段函数的分段点)。对于 $x=0$, 可通过定义来求导数(因为 $x=0$ 是分段函数的分段点)。即

当 $x>0$ 时:

$$f'(x)=(x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta})'=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$$

当 $x<0$ 时:

$$f'(x)=(0)'=0$$

当 $x=0$ 时:

左导数为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{0}{\Delta x}=0$

右导数是0。因为$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,前提是$f'(x)$ 在 $x=0$ 处存在(也就是$f'(0)$ 存在)。所以，假设右导数不为0，意味着左右导数不相等，那么函数$f(x)$ 在 $x=0$ 处就不可导，即$f'(0)$ 不存在，这就矛盾了。所以右导数也是0。

即便如此，我们还是把右导数的定义式写出来。因为可以通过写定义式，看看能不能推出什么与 $\alpha$、$\beta$ 有关的结论。

右导数的定义式为

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^{\alpha}\cos\dfrac{1}{(\Delta x)^{\beta}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}(\Delta x)^{\alpha-1}\cos\frac{1}{(\Delta x)^{\beta}}$$

已知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}(\Delta x)^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{(\Delta x)^{\beta}}=0$，所以必然有 $a-1>0$（因为只有当 $a-1>0$ 时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}(\Delta x)^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{(\Delta x)^{\beta}}$ 才属于“$0\times$有界”，计算结果才是0)，解得 $\alpha>1$。

虽然早已知道右导数为0，但是通过写右导数的定义式得到了 $\alpha>1$ 这样一个有用的结论。

由于左导数 = 右导数 = 0，所以$f'(0)=0$。

综上所述，可得

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}$。

当 $x<0$ 时，$f'(x)=0$。

当 $x=0$ 时，$f'(0)=0$。

即

$$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0\\ 0, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

已知$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，说明“极限值 = 函数值”，可以推出“右极限值 = 函数值”，转化成数学语言就是：

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=f'(0)$$

由于 $f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0\\ 0, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$，所以很明显有$f'(0)=0$，所以有

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=0 \tag{1}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ 很明显还等于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}\right)$，所以有

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}\right) \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}\right)=0 \tag{3}$$

由于 $\alpha>1$，所以必然有

$$\lim_{x\to 0^+}\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}=0 \tag{4}$$

注：(4)式的成立是因为"$0\times$有界$=0$"。

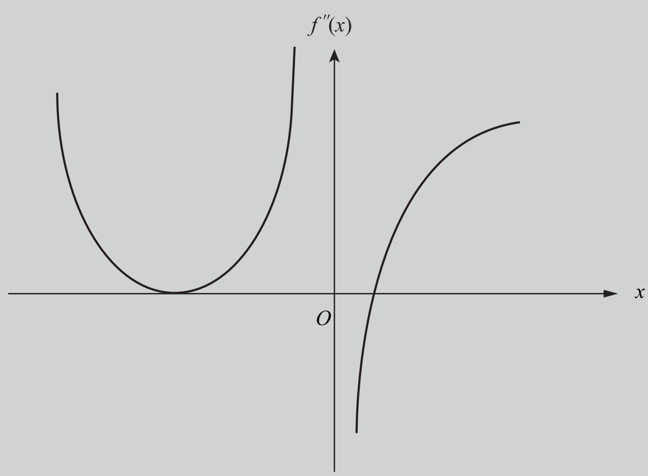
将(4)式代入(3)式，可得

$$\lim_{x\to 0^+}\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}=0 \tag{5}$$

(5)式要想成立，必然有 $\alpha-\beta-1>0$（因为只有当 $\alpha-\beta-1>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$ 才属于"$0\times$有界"，计算结果才是0），解得 $\alpha-\beta>1$。所以本题应该选择(A)选项。

(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其2阶导函数 $f''(x)$ 的图形如下图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为(　　)。

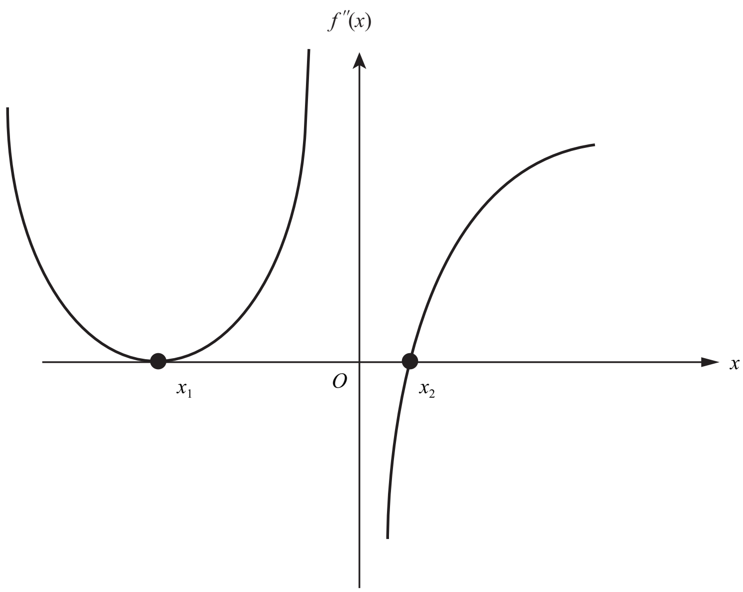
(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3



**解**：很多同学的心中都有一个思维定势：平面直角坐标系的两个轴肯定是 $x$ 轴和 $y$ 轴。

大家仔细看一下，本题所给的平面直角坐标系的两个轴是 $x$ 轴和 $y$ 轴吗？不是，是 $x$ 轴和 $f''(x)$ 轴。也就是说，本题所给的图像是二阶导函数 $f''(x)$ 的图像，而不是函数 $f(x)$ 的图像。因此审题至关重要。

为了方便后续的讲解，在题中所给的平面直角坐标系中标出两个点 $x_1$ 和 $x_2$。如下图所示。

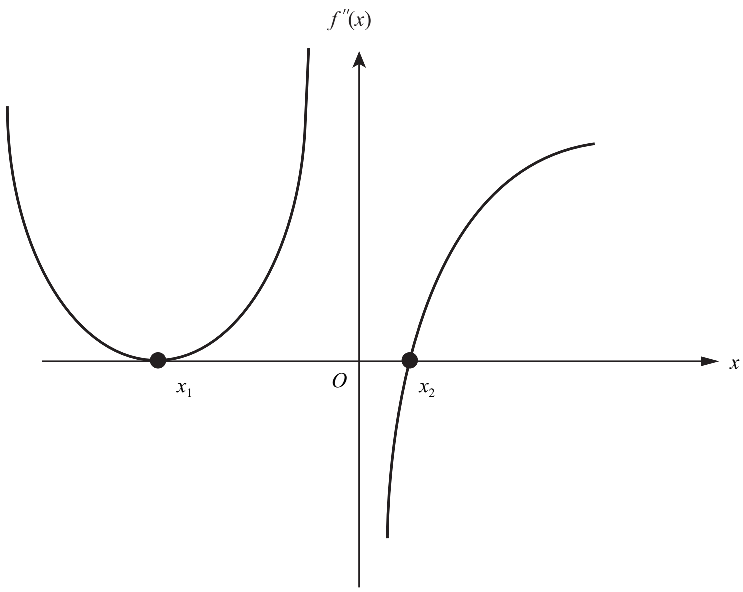



本题是求曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数，而拐点取自二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点。

在上图中，很容易看出：点 $x = x_1$ 和点 $x = x_2$ 是二阶导函数为 0 的点，点 $x = 0$ 是二阶导函数不存在的点。

可能有的同学就说："一共三个点嘛，所以本题选(D)。"这种说法是完全错误的，因为并非所有二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点都一定是拐点，而是拐点从二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点中取罢了。

那么，在 $x=x_1$、$x=x_2$、$x=0$ 这三个点中，究竟哪个是拐点呢？判断的方法是：看每个点两侧的二阶导函数是否一个大于0一个小于0。如果是，那么该点就是拐点。如果不是，那么该点就不是拐点。




先来判断点 $x=x_1$ 是不是拐点。

由上图可知，$x=x_1$ 两侧的二阶导函数都是大于0的，所以 $x=x_1$ 不是拐点。

再来判断点 $x=0$ 是不是拐点。

由上图可知，$x=0$ 左侧的二阶导函数大于0，右侧的二阶导函数小于0，所以 $x=0$ 是拐点。

最后来判断点 $x=x_2$ 是不是拐点。

由上图可知，$x=x_2$ 左侧的二阶导函数小于0，右侧的二阶导函数大于0，所以 $x=x_2$ 是拐点。

综上所述，曲线 $y=f(x)$ 一共有两个拐点，所以本题应该选择(C)选项。

（5）设函数 $f(u,v)$ 满足 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|$ 依次是（　　）。

（A）$\frac{1}{2}, 0$　　（B）$0, \frac{1}{2}$

（C）$-\frac{1}{2}, 0$　　（D）$0, -\frac{1}{2}$

**解**：令 $u=x+y, v=\frac{y}{x}$，可以解得 $x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$。

已知

$$f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2 \tag{1}$$

把 $u=x+y, v=\frac{y}{x}$ 代入（1）式的等式左侧，把 $x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$ 代入（1）式的等式右侧，得

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v^2)}{(1+v)^2} \tag{2}$$

由于 $f(u,v)=\frac{u^2(1-v^2)}{(1+v)^2}$，所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=\left.\frac{2u(1-v^2)(1+v)^2-0}{(1+v)^4}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=\frac{2\times1\times(1-1^2)(1+1)^2-0}{(1+1)^4}=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=\left.\frac{-2vu^2(1+v)^2-2(1+v)u^2(1-v^2)}{(1+v)^4}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\frac{1}{2}$$

所以本题应该选择（D）选项。

（6）设 $D$ 是第一象限中的曲线 $2xy=1$、$4xy=1$ 与直线 $y=x$、$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 $D$ 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）。

（A）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

（B）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

（C）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

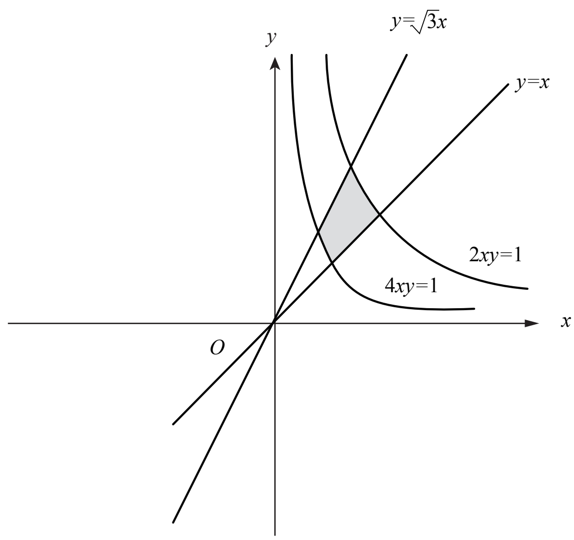
（D）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

**解:** 本题是计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分或者用"直角坐标系法"计算，或者用"极坐标系法"计算。

本题中所给的四个选项都是用"极坐标系法"来计算的。立刻可以把(C)选项和(D)选项排除掉。因为当用"极坐标系法"计算二重积分时，除了将被积函数中的 $x$ 表示为 $r\cos\theta$、$y$ 表示为 $r\sin\theta$ 之外，被积函数中还必须乘以一个 $r$，而(C)选项和(D)选项的被积函数中都没有乘以 $r$。

(A)选项和(B)选项中所给的被积函数都是正确的，所以要关注的是(A)选项和(B)选项中所给的积分上、下限，看哪个对。

首先，在平面直角坐标系中画出二重积分的积分区域 $D$，也就是画出第一象限中的曲线 $2xy=1$、$4xy=1$ 与直线 $y=x$、$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，如下图所示。

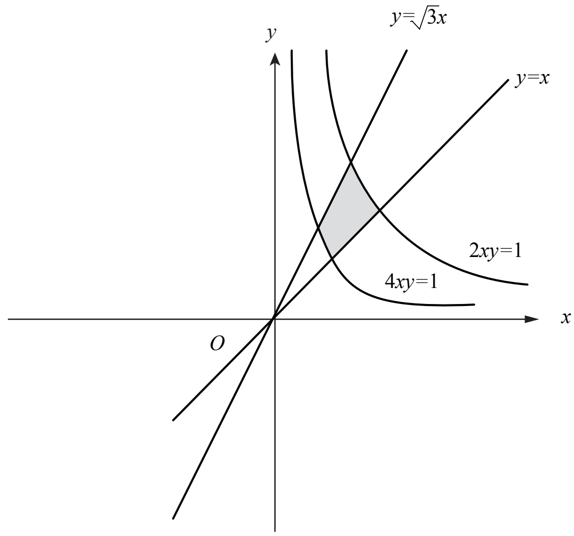



这里给大家指导一下上图的画法：可以看出 $y=x$ 和 $y=\sqrt{3}x$ 都是过原点的直线，如果不知道哪个在上面，就代一个数，比如代 $x=1$，就可以得到其中一个 $y=1$ 另一个 $y=\sqrt{3}$，于是就知道哪个应该画在上面了。再来看 $2xy=1$ 和 $4xy=1$，整理后就是 $y=\dfrac{\frac{1}{2}}{x}$ 和 $y=\dfrac{\frac{1}{4}}{x}$，这就是双曲线，如果不知道哪个在上面，同样代一个数就可以了。

现在来确定外层积分 $\theta$ 的积分上、下限以及内层积分 $r$ 的积分上、下限。

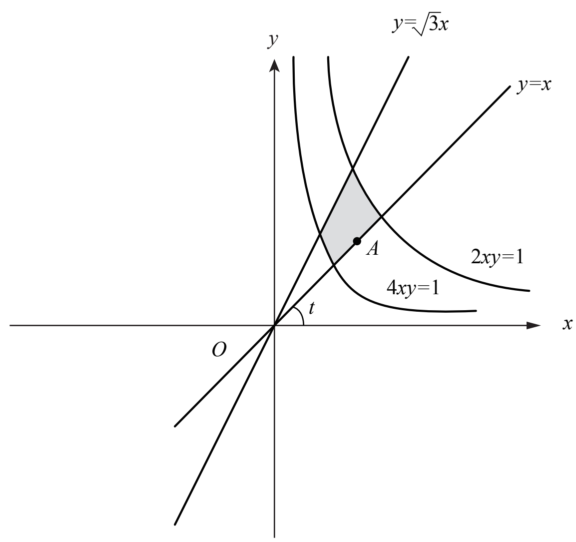
先来确定 $\theta$ 的积分上、下限。

大家来看以下阴影区域

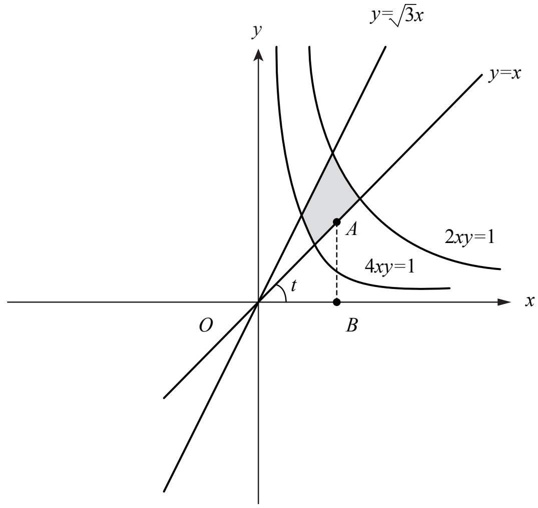



先来确定 $\theta$ 的积分下限。在阴影区域 $D$ 中有无数个点，在这无数个点中，哪个点和原点的连线与 $x$ 轴正半轴之间的角度最小？很明显在阴影区域的边界 $y=x$ 上取点时，该点和原点的连线与 $x$ 轴正半轴之间的角度最小，是 $45°$，即 $\frac{\pi}{4}$。下面解释一下。

在阴影区域的边界 $y=x$ 上取点时，该点与原点的连线与 $x$ 轴正半轴之间的角度最小。所以现在在阴影区域的边界 $y=x$ 上任意取一点 $A$，如下图所示。



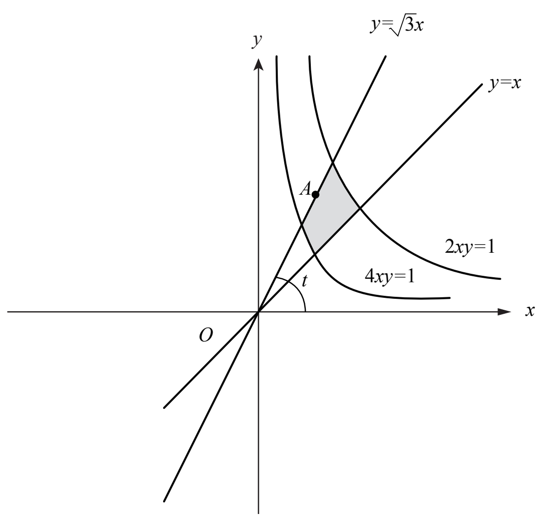

那么点 $A$ 和原点 $O$ 的连线 $OA$ 与 $x$ 轴正半轴之间的角度 $t$ 是多少呢？过点 $A$ 作垂直于 $x$ 轴的直线（垂足为点 $B$），如下图所示。



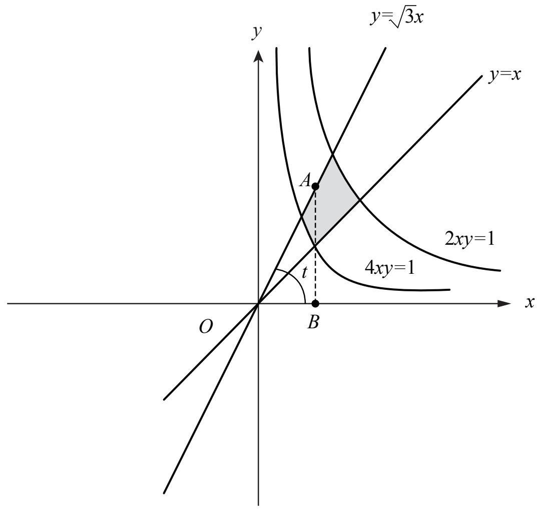

三角形 $OAB$ 很明显是一个等腰直角三角形(说它是等腰三角形,指的是 $OB$ 和 $AB$ 的长度相等,因为点 $A$ 是直线 $y=x$ 上的点),所以可以知道角度 $t$ 为 $45°$,即 $t=\dfrac{\pi}{4}$。所以 $\theta$ 的积分下限是 $\dfrac{\pi}{4}$。

再来确定 $\theta$ 的积分上限。同理,在阴影区域 $D$ 中哪个点和原点的连线与 $x$ 轴正半轴之间的角度最大?很明显在阴影区域的边界 $y=\sqrt{3}x$ 上取点时,该点和原点的连线与 $x$ 轴正半轴之间的角度最大,是 $60°$,也就是 $\dfrac{\pi}{3}$。下面解释一下。

在阴影区域的边界 $y=\sqrt{3}x$ 上取点时,该点和原点的连线与 $x$ 轴正半轴之间的角度最大。所以在阴影区域的边界 $y=\sqrt{3}x$ 上任意取一点 $A$,如下图所示。



那么点 $A$ 和原点 $O$ 的连线 $OA$ 与 $x$ 轴正半轴之间的角度 $t$ 是多少呢？过点 $A$ 作垂直于 $x$ 轴的直线(垂足为点 $B$)，如下图所示。



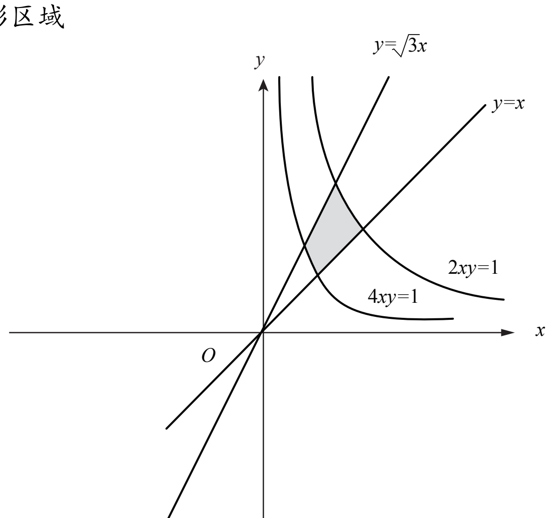

三角形 $OAB$ 很明显是一个直角三角形，而且 $\tan t=\dfrac{AB}{OB}=\sqrt{3}$，所以可以知道角度 $t$ 等于 $60°$，即 $t=\dfrac{\pi}{3}$。所以 $\theta$ 的积分上限是 $\dfrac{\pi}{3}$。

现在来看(A)选项和(B)选项。

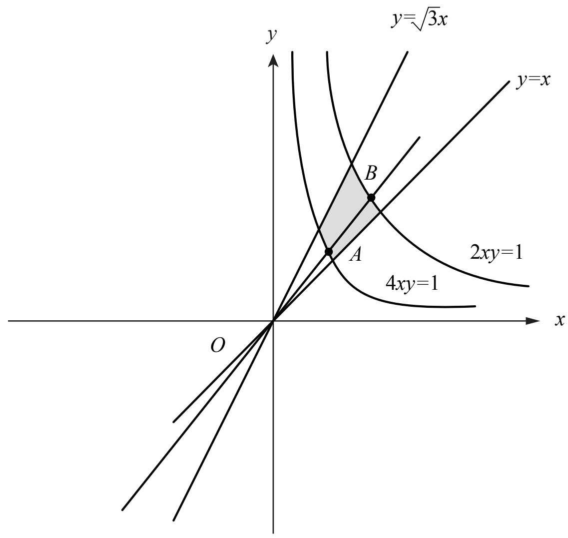
(A)选项是 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$，(B)选项是 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$。两项中 $\theta$ 的积分下限都是 $\dfrac{\pi}{4}$，上限都是 $\dfrac{\pi}{3}$，所以仍然无法判断出到底选(A)还是选(B)。

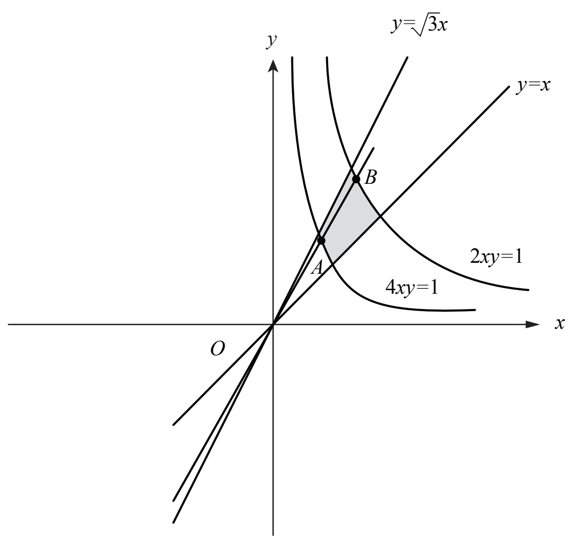
再来确定 $r$ 的积分上、下限。

大家来看以下阴影区域



先来确定 $r$ 的积分下限。从原点 $O$ 引一条经过阴影区域的直线，有无数种引法，如下图所示两种。




但是，无论哪种引法，该直线肯定与阴影区域的边界有两个交点。在这两个交点中，离原点近的点肯定在边界 $4xy=1$ 上。所以把 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$ 代入 $4xy=1$ 中，得

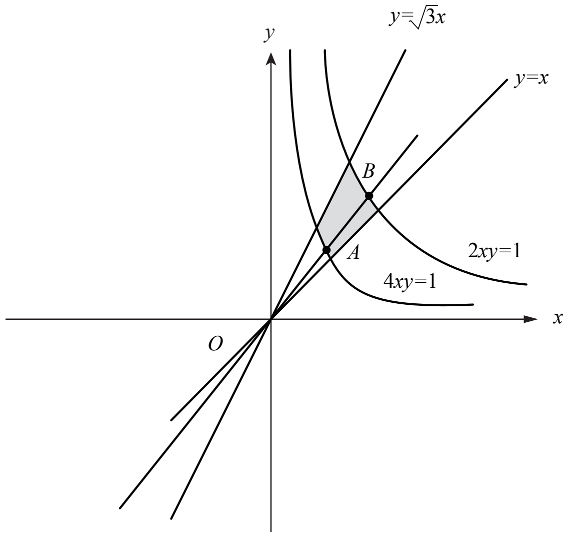
$$4r^2\sin\theta\cos\theta=1$$

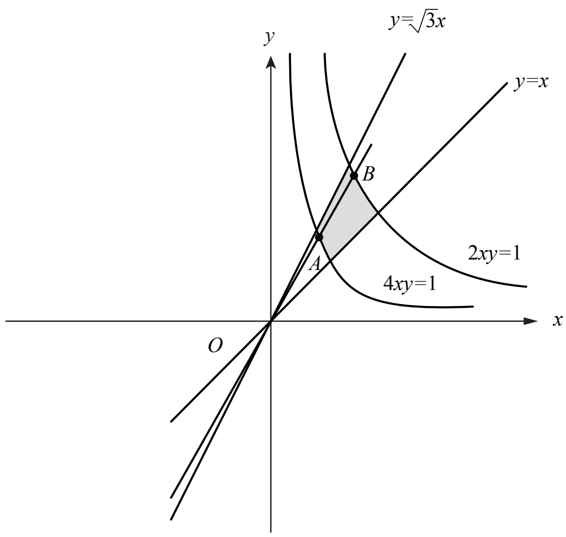
解得

$$r_1=\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}},\ r_2=-\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}。$$

我们知道，$r$ 一定是大于等于 0 的，所以舍去 $r_2$，取 $r_1$，所以 $r$ 的积分下限是 $\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$。

再来确定 $r$ 的积分上限。从原点 $O$ 引一条经过阴影区域的直线，有无数种引法，如下图所示两种。




但是，无论哪种引法，该直线肯定与阴影区域的边界有两个交点。在这两个交点中，离原点远的点肯定在边界 $2xy = 1$ 上。所以把 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ 代入 $2xy = 1$ 中，得

$$2r^2\sin\theta\cos\theta = 1$$

解得

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}},\ r_2 = -\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}。$$

我们知道,$r$ 一定是大于等于 0 的,所以舍去 $r_2$,取 $r_1$,所以 $r$ 的积分上限是 $\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$。

现在判断出 $r$ 的积分下限是 $\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$,上限是 $\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$。

所以本题应该选择(B)选项。

(7)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 4 & a^2\end{pmatrix}$,$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\ d\\ d^2\end{pmatrix}$,若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为(　　)。

(A) $a\notin\Omega, d\notin\Omega$　　(B) $a\notin\Omega, d\notin\Omega$

(C) $a\in\Omega, d\notin\Omega$　　(D) $a\in\Omega, d\in\Omega$

**解**:由于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 4 & a^2\end{pmatrix}$,$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\ d\\ d^2\end{pmatrix}$,所以线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+2x_2+ax_3=d\\ x_1+4x_2+a^2x_3=d^2\end{cases}$$

这明显是一个非齐次方程组(因为该方程组中的第一个方程的等式右侧不是 0),求解非齐次方程组通解的方法如下。

第一步:写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩 $r_1$、$r_2$。

第二步:判断解的类型。

①若 $r_1\neq r_2$,则该非齐次方程组无解。

②若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2=n$(未知数个数),则该非齐次方程组有唯一的解,不用再进行第三步了。

③若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2<n$(未知数个数),则该非齐次方程组有无穷多解,需要进行步骤第三步。

第三步:先当成对应的齐次方程组,按齐次方程组的第三步求出齐次方程组的通解。然后再还原成非齐次方程组,令自由未知数取全零,求出非齐次方程组的一个特解。最后,用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解,得到的就是非齐次方程组的通解。

对于本题来说,不用进行“第三步”,因为本题只是问非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多解的充分必要条件。

先进行第一步。

由于非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+2x_2+ax_3=d\\x_1+4x_2+a^2x_3=d^2\end{cases}$，所以该方程组对应的矩阵为

$(\boldsymbol{A}\mid\vec{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}$。还要求矩阵 $(\boldsymbol{A}\mid\vec{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}$ 的秩 $r_1$ 和矩阵

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$ 的秩 $r_2$。先要矩阵 $(\boldsymbol{A}\mid\vec{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵到

$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$。

现在可以开始求两个秩了，但要分多种情况来讨论。对于本题而言，由于已知该非齐次方程组有无穷多组解，所以可以把“求两个秩”这一环节放在“第二步”来进行，这样就不用分那么多情况来讨论了。

再来进行第二步。

第二步要做的就是根据已知的该非齐次方程组有无穷多组解，求两个秩 $r_1$ 和 $r_2$。

由于该非齐次方程组有无穷多组解，所以有 $r_1=r_2<n$。对于本题而言，未知数个数 $n=3$，所以有 $r_1=r_2<3$。第一步化得的阶梯形矩阵是 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$，由于 $r_1=r_2<3$，所以有 $\begin{cases}(a-1)(a-2)=0\\(d-1)(d-2)=0\end{cases}$，解得 $a=1$ 或 $a=2$，$d=1$ 或 $d=2$。

现在来看本题所给的四个选项了。

(A)选项是 $a\notin\Omega$，$d\notin\Omega$，(B)选项是 $a\notin\Omega$，$d\in\Omega$，(C)选项是 $a\in\Omega$，$d\notin\Omega$，(D)选项是 $a\in\Omega$，$d\in\Omega$，而 $\Omega=\{1,2\}$，所以本题应该选择(D)选项。

(8)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\vec{x}=\boldsymbol{P}\vec{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$，若 $\boldsymbol{Q}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{-e_3},\overrightarrow{e_2})$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\vec{x}=\boldsymbol{Q}\vec{y}$ 下的标准形为(　　)。

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

**解**：本题可以迅速把(C)选项和(D)选项给排除掉。因为虽然同一个二次型可以被化为不同的标准形，但是这些不同的标准形的正、负惯性指数肯定是一样的。本题中，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 可以被化为标准形 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，这个标准形的正惯性指数为2，负惯性指数为1，这就说明二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 所化为的其他标准形的正、负惯性指数也肯定是2和1。(C)选项的标准形的正、负惯性指数分别为1和2，(D)选项的标准形的正、负惯性指数分别为0和3，所以可以立刻排除掉。

那么(A)选项和(B)选项究竟哪个正确呢？已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\vec{x}=\boldsymbol{P}\vec{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$，这说明2、1、$-1$为二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的对应矩阵的三个特征值，同时还说明特征值2所对应的所有特征向量为 $k_1\overrightarrow{e_1}(k_1\neq 0)$，特征值1所对应的所有特征向量为 $k_2\overrightarrow{e_2}(k_2\neq 0)$，特征值 $-1$ 所对应的所有特征向量为 $k_3\overrightarrow{e_3}(k_3\neq 0)$。

由此可知，矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{-e_3},\overrightarrow{e_2})$ 的第一列 $\overrightarrow{e_1}$ 为特征值2所对应的特征向量($k_1=1$)，第二列 $\overrightarrow{-e_3}$ 为特征值 $-1$ 所对应的特征向量($k_3=-1$)，第三列 $\overrightarrow{e_2}$ 为特征值1所对应的特征向量($k_2=1$)。

所以二次型在正交变换 $\vec{x}=\boldsymbol{Q}\vec{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$，本题应该选择(A)选项。

## 二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9)设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=3t+t^3\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ ________。

**解**：本题要求的是 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$，分以下三步求解。

第一步是求出 $\dfrac{dy}{dx}$。

由于 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=3t+t^3\end{cases}$，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=(3t^2+3)\times(1+t^2)=6t^2+3t^4+3$$

第二步是求出 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

由于 $\dfrac{dy}{dx}=6t^2+3t^4+3$，所以

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d(6t^2+3t^4+3)}{dx}=\frac{d(6t^2+3t^4+3)}{dt}\times\frac{dt}{dx}$$
$$=(12t+12t^3)\times(1+t^2)=12t(1+t^2)^2$$

第三步是求出 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$。

由于 $\frac{d^2y}{dx^2}=12t(1+t^2)^2$，所以

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=12t(1+t^2)^2|_{t=1}=48。$$

所以本题应填48。

（10）函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(0)=$ ________ 。

**解**：由于本题需要用到莱布尼兹公式，所以先给大家介绍一下。

莱布尼兹公式如下：

$$[f(x)\times g(x)]^{(n)}=C_n^0 f^{(0)}(x)g^{(n)}(x)+C_n^1 f^{(1)}(x)g^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n^n f^{(n)}(x)g^{(0)}(x)$$

大家一定要注意：等式右侧的“(0)、(1)、(2)…”指的并不是“0 次方、1 次方、2 次方……”而是“0 阶导、1 阶导、2 阶导……”

对于本题，由莱布尼茨公式可知

$$f^{(n)}(x)=C_n^0(x^2)^{(0)}(2^x)^{(n)}+C_n^1(x^2)^{(1)}(2^x)^{(n-1)}+C_n^2(x^2)^{(2)}(2^x)^{(n-2)}+\cdots+C_n^n(x^2)^{(n)}(2^x)^{(0)}$$

有的同学问：用完莱布尼兹公式之后有那么多项，怎么计算？

而实际上，只有三项，即

$$f^{(n)}(x)=C_n^0(x^2)^{(0)}(2^x)^{(n)}+C_n^1(x^2)^{(1)}(2^x)^{(n-1)}+C_n^2(x^2)^{(2)}(2^x)^{(n-2)} \quad (1)$$

为什么这么多项就变成三项了呢？因为对于 $x^2$，当对它求导的阶数大于 2 时，就是 0 了，所以只有三项。

由于 $C_n^0=1$，$C_n^1=n$，$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$，所以(1)式可以变为

$$f^{(n)}(x)=(x^2)^{(0)}(2^x)^{(n)}+n(x^2)^{(1)}(2^x)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}(x^2)^{(2)}(2^x)^{(n-2)} \quad (2)$$

由于 $(x^2)^{(0)}=x^2$，$(x^2)^{(1)}=2x$，$(x^2)^{(2)}=2$，所以(2)式可以变为

$$f^{(n)}(x)=(x^2)(2^x)^{(n)}+n\times 2x\times(2^x)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}\times 2\times(2^x)^{(n-2)} \quad (3)$$

下面告诉大家一个结论：$(a^x)^{(n)}=(\ln a)^n\times a^x$。由这个结论可知 $(2^x)^{(n)}=(\ln 2)^n\times 2^x$，$(2^x)^{(n-1)}=(\ln 2)^{n-1}\times 2^x$，$(2^x)^{(n-2)}=(\ln 2)^{n-2}\times 2^x$。所以(3)式可以变为

$$f^{(n)}(x)=x^2\times(\ln2)^n\times2^x+n\times2x\times(\ln2)^{n-1}\times2^x+\frac{n(n-1)}{2}\times2\times(\ln2)^{n-2}\times2^x \tag{4}$$

由(4)式可知

$$\begin{aligned}f^{(n)}(0)&=0^2\times(\ln2)^n\times2^0+n\times2\times0\times(\ln2)^{n-1}\times2^0+\frac{n(n-1)}{2}\times\\&\quad 2\times(\ln2)^{n-2}\times2^0\\&=0+0+n\times(n-1)\times(\ln2)^{n-2}\\&=n(n-1)(\ln2)^{n-2}\end{aligned}$$

所以本题应填$n(n-1)(\ln2)^{n-2}$。

(11)设函数$f(x)$连续,$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\,\mathrm{d}t$,若$\varphi(1)=1$,$\varphi'(1)=5$,则$f(1)=$ ________。

**解:** 将$\varphi(1)=1$代入$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\,\mathrm{d}t$中,得

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=1 \tag{1}$$

由于$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\,\mathrm{d}t$是对$t$积分,所以被积函数中的$x$可以提到外面,即

$$\varphi(x)=x\int_0^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

由(2)式可知,$\varphi'(x)$为

$$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t+2x^2f(x^2) \tag{3}$$

将$\varphi'(1)=5$代入(3)式,得

$$5=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+2f(1) \tag{4}$$

将(1)式代入(4)式,得

$$5=1+2f(1) \tag{5}$$

由(5)式可解得

$$f(1)=2 \tag{6}$$

所以本题应填2。

(12)设函数$y=y(x)$是微分方程$y''+y'-2y=0$的解,且在$x=0$处$y(x)$取得极值3,则$y(x)=$ ________。

**解**：函数 $y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处 $y(x)$ 取得极值3，由此可知 $y(0) = 3$，$y'(0) = 0$（之所以 $y'(0) = 0$，是因为极值点或者是一阶导函数为 0 的点，或者是不可导点，显然函数 $y = y(x)$ 是可导的，所以是一阶导函数为 0 的点）。

于是本题就被转化为：求二阶微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 3$，$y'(0) = 0$ 下的特解。

要想求特解，就必须先求通解。

求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法如下：

设 $Ay'' + By' + Cy = 0$ 是一个二阶常系数齐次线性微分方程。

第一步：先把 $y''$ 的系数变为 1，即变为 $y'' + \frac{B}{A}y' + \frac{C}{A}y = 0$，记 $p = \frac{B}{A}$，$q = \frac{C}{A}$。

对于本题而言，$y''$ 的系数本来就是 1，所以不用变了。且 $p = 1$，$q = -2$。

第二步：解方程 $r^2 + pr + q = 0$。

本题中，要解的是 $r^2 + r - 2 = 0$，解得 $r_1 = 1$，$r_2 = -2$。

第三步：写出通解。

情况 1：若第二步解出的 $r_1$、$r_2$ 为实根并且 $r_1 \neq r_2$，则通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$。

情况 2：若第二步解出的 $r_1$、$r_2$ 为实根并且 $r_1 = r_2$，则通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$。

情况 3：若第二步解出的 $r_1$、$r_2$ 为复数根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$，则通解为 $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$。

本题，属于情况 1，所以通解为 $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$。

接下来求在初始条件 $y(0) = 3$、$y'(0) = 0$ 下的特解（其实就是确定 $C_1$ 和 $C_2$）。

由于 $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$，所以 $y' = C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x}$。

把 $y(0) = 3$ 代入 $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$ 中，得 $3 = C_1 + C_2$。

把 $y'(0) = 0$ 代入 $y' = C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x}$ 中，得 $0 = C_1 - 2C_2$。

两个等式联立，解得 $C_1 = 2$，$C_2 = 1$。代入通解 $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$ 中，就得到特解 $y = 2e^{x} + e^{-2x}$。

所以本题应填 $2e^{x} + e^{-2x}$。

（13）若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定，则 $dz|_{(0,0)} =$ ________。

**解**：$dz|_{(0,0)} = \frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)} dx + \frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)} dy$，所以本题实际想考的是求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)}$。

先求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}$。

已知 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$，将等式左右两侧同时对 $x$ 求导。

等式左侧 $e^{x+2y+3z}+xyz$ 对 $x$ 求导得：$e^{x+2y+3z}(1+3\frac{\partial z}{\partial x})+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}$。

等式右侧 1 对 $x$ 求导得：0。

所以有 $e^{x+2y+3z}(1+3\frac{\partial z}{\partial x})+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(e^{x+2y+3z}+yz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$。

接下来求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$。有的同学说："直接把 $x=0$，$y=0$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(e^{x+2y+3z}+yz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$ 中就可以了。"可是，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(e^{x+2y+3z}+yz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$ 中还含有 $z$，所以不能直接把 $x=0$，$y=0$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sin x-1-yz}{e^{z}+xy}$ 中，而应该先把 $x=0$，$y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中求出 $z$，然后再把 $x=0$，$y=0$ 以及求得的 $z$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(e^{x+2y+3z}+yz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$ 中，求出 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$。

先将 $x=0$，$y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$，得

$$e^{3z}=1$$

解得 $z=0$。

再将 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(e^{x+2y+3z}+yz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$ 中，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}。$$

再来求 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$。

已知 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$，将等式左右两侧同时对 $y$ 求导。

等式左侧 $e^{x+2y+3z}+xyz$ 对 $y$ 求导得：$e^{x+2y+3z}(2+3\frac{\partial z}{\partial y})+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}$。

等式右侧 1 对 $y$ 求导得：0。

所以有 $e^{x+2y+3z}(2+3\frac{\partial z}{\partial y})+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(2e^{x+2y+3z}+xz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$。

接下来求 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$。

同理，先将 $x=0$，$y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$，得

$$e^{3z}=1$$

解得 $z=0$。

再将 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(2e^{x+2y+3z}+xz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$ 中，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}。$$

所以有 $\mathrm{d}z|_{(0,0)} = \frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)}\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\mathrm{d}y$。

本题应填 $-\frac{1}{3}\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\mathrm{d}y$。

(14)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2、-2、1。$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}| =$ ________。

**解**：把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值代入关于 $\boldsymbol{A}$ 的多项式中去替换 $\boldsymbol{A}$，得到的就是关于 $\boldsymbol{A}$ 的多项式的特征值。所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的三个特征值分别为

$$\lambda_1 = 2^2 - 2 + 1 = 3$$

$$\lambda_2 = (-2)^2 - (-2) + 1 = 7$$

$$\lambda_3 = 1^2 - 1 + 1 = 1$$

一个矩阵的所有特征值之积肯定等于该矩阵所对应的行列式的值，所以行列式 $|\boldsymbol{B}| = 3 \times 7 \times 1 = 21$。

所以本题应填 21。

## 三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x) = x + a\ln(1+x) + bx\sin x$，$g(x) = kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \to 0$ 是等价无穷小，求 $a$、$b$、$k$ 的值。

**解**：$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \to 0$ 是等价无穷小，所以有

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{1}$$

已知

$$f(x) = x + a\ln(1+x) + bx\sin x \tag{2}$$

$$g(x) = kx^3 \tag{3}$$

将(2)式、(3)式代入(1)式，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + a\ln(1+x) + bx\sin x}{kx^3} = 1 \tag{4}$$

由于 $\lim\limits_{x \to 0}[x + a\ln(1+x) + bx\sin x] = 0$，$\lim\limits_{x \to 0} kx^3 = 0$，所以 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + a\ln(1+x) + bx\sin x}{kx^3}$ 属于“$\frac{0}{0}$”型的极限，可以对其使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}\tag{5}$$

(4)式、(5)式相结合,得

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=1\tag{6}$$

现在告诉大家一个定理。

在 $\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{g(x)}$ = 非零常数 $C$ 的前提下:若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$;若 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$。

对于(6)式而言,等式右侧的 1 是非零常数,并且可以算出 $\lim\limits_{x\to0}3kx^2=0$,根据上述定理有 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x\right]=0$,所以 $1+\frac{a}{1+0}+0+0=0$,解得 $a=-1$。

由于 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x\right]=0$,$\lim\limits_{x\to0}3kx^2=0$,所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$ 属于“$\frac{0}{0}$”型的极限,可以对其使用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}\tag{7}$$

(6)式、(7)式相结合,得

$$\lim_{x\to0}\frac{-\frac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}=1\tag{8}$$

由于(8)式的等式右侧是非零常数,并且 $\lim\limits_{x\to0}6kx=0$,所以再次使用上述定理有 $\lim\limits_{x\to0}\left[-\frac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x\right]=0$,所以 $-\frac{-1}{(1+0)^2}+2b\cos0-0=0$,解得 $b=-\frac{1}{2}$。

由于 $\lim\limits_{x\to0}\left[-\frac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x\right]=0$,$\lim\limits_{x\to0}6kx=0$,所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}$ 属于“$\frac{0}{0}$”型的极限,可以对其使用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to0}\frac{-\frac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{2}{(1+x)3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}\tag{9}$$

(8)式、(9)式相结合,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{(1+x)3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}=1 \tag{10}$$

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{2}{(1+x)3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}$ 还可以写为

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{(1+x)^3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}=\frac{-\frac{2}{(1+0)^3}-2b\sin 0-b\sin 0-b\times 0\times\cos 0}{6k} \tag{11}$$

(10)式、(11)式相结合，得

$$\frac{-\frac{2}{(1+0)^3}-2b\sin 0-b\sin 0-b\times 0\times\cos 0}{6k}=1 \tag{12}$$

(12)式可以化简为

$$\frac{-2}{6k}=1 \tag{13}$$

由(13)式可解得 $k=-\dfrac{1}{3}$。

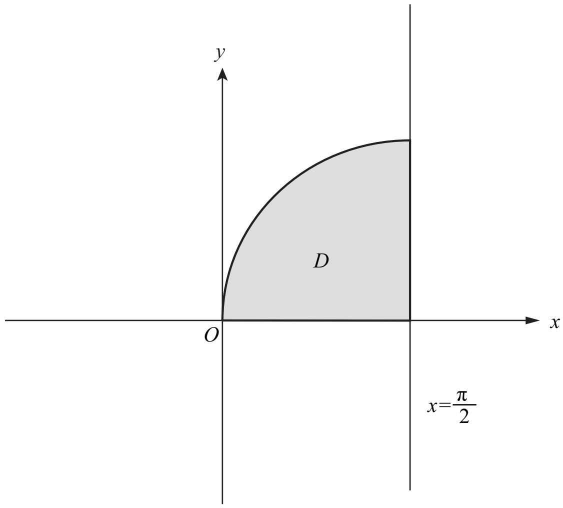
综上所述，有 $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{2}$，$k=-\dfrac{1}{3}$。

(16)（本题满分10分）

设 $A>0$，$D$ 是由曲线段 $y=A\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域。$V_1$、$V_2$ 分别表示 $D$ 绕 $x$ 轴与绕 $y$ 轴旋转所成旋转体的体积。若 $V_1=V_2$，求 $A$ 的值。

**解：** 先在平面直角坐标系中画出由曲线段 $y=A\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域 $D$，如下图所示。

有的同学可能不太明白为什么 $y=A\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的图像是图中的那条曲线。这是因为：$y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的图像肯定是一条那样的曲线，而 $A>0$，如果 $0<A<1$，那么 $y=A\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的图像就是 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的图像稍微矮一点；如果 $A>1$，那么 $y=A\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的图像就是 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的图像稍微高一点。总之无论是 $0<A<1$ 还是 $A>1$，$y=A\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的图像都肯定是那样的一条曲线，只




是高矮不同罢了。

由于 $V_1$、$V_2$ 分别表示 $D$ 绕 $x$ 轴与绕 $y$ 轴旋转所成旋转体的体积，根据绕 $x$ 轴与绕 $y$ 轴的旋转体体积公式可知

$$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi A^2\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi^4A^2}{4}$$

$$V_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi xA\sin x\mathrm{d}x=2\pi A$$

已知 $V_1=V_2$，所以有 $\frac{\pi^4A^2}{4}=2\pi A$，解得 $A=\frac{8}{\pi}$。

(17)(本题满分10分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$，$f'_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$，$f(0,y)=y^2+2y$，求 $f(x,y)$ 的极值。

**解：**$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$，把等式的两边以 $y$ 积分。

左边 $f''_{xy}(x,y)$ 以 $y$ 积分得 $f'_x(x,y)$，右边 $2(y+1)\mathrm{e}^x$ 以 $y$ 积分得 $(y+1)^2\mathrm{e}^x+\varphi(x)$，所以有 $f'_x(x,y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+\varphi(x)$。

注意：右边以 $y$ 积分的时候，$x$ 是当成常数的，所以 $\mathrm{e}^x$ 可以提到积分号之外并且最后加的是关于 $x$ 的函数 $\varphi(x)$ 而不是 $C$。

把 $y=0$ 代入 $f'_x(x,y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+\varphi(x)$ 中，得 $f'_x(x,0)=(0+1)^2\mathrm{e}^x+\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\varphi(x)$。

已知 $f'_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$，由此可以解出 $\varphi(x)=x\mathrm{e}^x$。

所以有 $f'_x(x,y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$。

把$f'_x(x, y) = (y+1)^2 e^x + xe^x$的两边以 $x$ 积分。

左边$f'_x(x, y)$以 $x$ 积分得$f(x, y)$，右边$(y+1)^2 e^x + xe^x$以 $x$ 积分得$(y+1)^2 e^x + (x-1)e^x + \psi(y)$，所以有$f(x, y) = (y+1)^2 e^x + (x-1)e^x + \psi(y)$。

注意：右边以 $x$ 积分的时候，$y$ 是当成常数的，所以$(y+1)^2$可以提到积分号之外并且最后加的是关于 $y$ 的函数$\psi(y)$而不是 $C$。

把 $x=0$ 代入$f(x, y) = (y+1)^2 e^x + (x-1)e^x + \psi(y)$中，得$f(0, y) = (y+1)^2 e^0 + (0-1)e^0 + \psi(y)$。

已知$f(0, y) = y^2 + 2y$，由此可以解出$\psi(y) = 0$。

所以有$f(x, y) = (y+1)^2 e^x + (x-1)e^x$。

由此可得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y+1)^2 e^x + xe^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)e^x$$

令$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$，则有

$$\begin{cases} (y+1)2e^x + xe^x = 0 \\ 2(y+1)e^x = 0 \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$。

由于$\dfrac{\partial f}{\partial x} = (y+1)^2 e^x + xe^x$，所以$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (y+1)^2 e^x + (x+1)e^x$；由于$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)e^x$，所以$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^x$。

把$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$代入$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (y+1)^2 e^x + (x+1)e^x$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(y+1)e^x$，$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)e^x$中，得$A = 1$，$B = 0$，$C = 2$。

由于$AC - B^2 > 0$且$A > 0$，所以$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$是函数$f(x, y)$的极小值点，函数$f(x, y)$的极小值为$f(0, -1) = [(-1)+1]^2 e^0 + (0-1)e^0 = -1$。

（18）（本题满分 10 分）

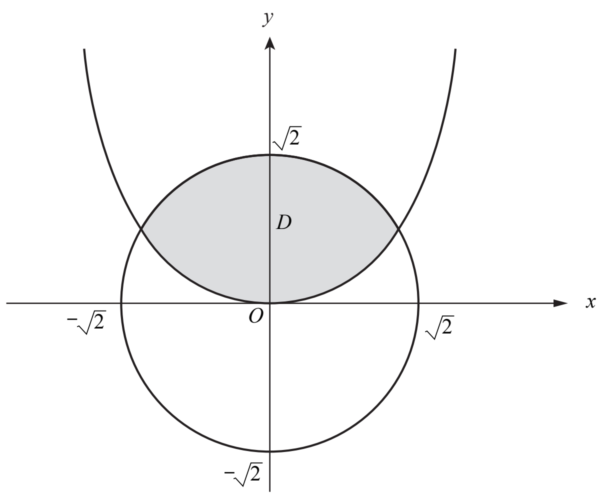
计算二重积分$\iint\limits_D x(x+y)\,dx\,dy$，其中$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2,\ y \geqslant x^2\}$。

**解**：先将二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 拆解为两个积分，即

$$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

先来计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

在平面直角坐标系中画出积分区域 $D$。由于积分区域 $D$ 是区域 $x^2+y^2\leqslant 2$（圆的内部）和区域 $y\geqslant x^2$（抛物线的上部，无限大的区域）的公共部分，所以积分区域 $D$ 如下图所示。




由上图可知，积分区域 $D$ 明显是关于 $y$ 轴对称的。而二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的被积函数 $xy$ 很明显关于 $x$ 是奇函数，根据二重积分的对称性可知

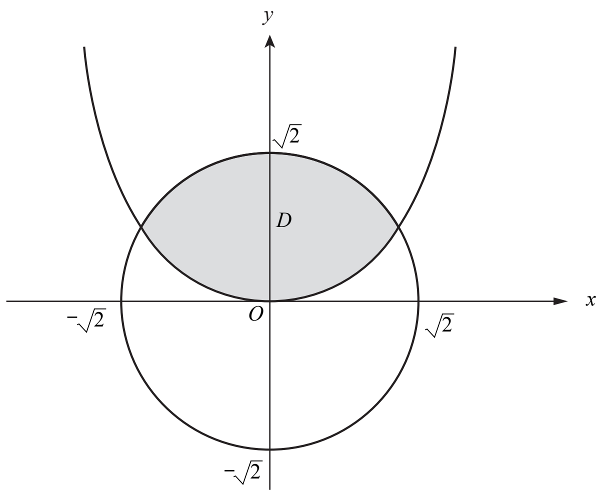
$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

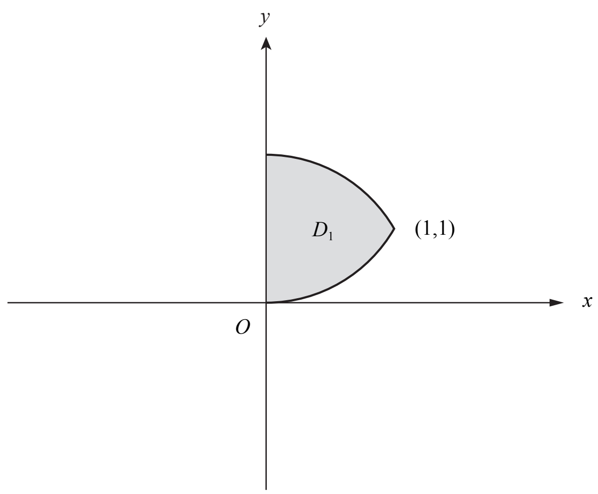
再来计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

在平面直角坐标系中画出积分区域 $D$。由于积分区域 $D$ 是区域 $x^2+y^2\leqslant 2$（圆的内部）和区域 $y\geqslant x^2$（抛物线的上部，无限大的区域）的公共部分，所以积分区域 $D$ 如下图所示。

由上图可知，积分区域 $D$ 明显是关于 $y$ 轴对称的。而二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的被积函数 $x^2$ 明显关于 $x$ 是偶函数，根据二重积分的对称性可知 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D_1$ 为下图所示的区域。

有的同学可能不太明白为什么上图中的那个点的坐标是（1，1），这是 $x^2+y^2=2$ 和




$y=x^2$ 联立得到的。

由上图可知 $2\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2\mathrm{d}y$，计算得 $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2\mathrm{d}y=\pi-\dfrac{2}{5}$。即

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi-\frac{2}{5} \tag{3}$$

将(2)式、(3)式代入(1)式得

$$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\pi-\frac{2}{5}=\pi-\frac{2}{5} \tag{4}$$

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 零点的个数。

**解**：本题可以转化为“已知方程 $\int_x^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}\mathrm{d}t = 0$，求该方程的实根个数”。

求实根个数的题有固定的解题套路。

第一步：设辅助函数。如果求一个方程 $f(x) = g(x)$ 的实根个数的题，就设辅助函数 $F(x) = f(x) - g(x)$。

对于本题而言，设的辅助函数是

$$F(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}\mathrm{d}t - 0 = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}\mathrm{d}t$$

第二步：确定辅助函数 $F(x)$ 的定义域。

本题所设的辅助函数是 $F(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}\mathrm{d}t$，所以定义域是 $(-\infty, +\infty)$。

第三步：求两种值。

一是辅助函数 $F(x)$ 在定义域内的所有极值。

二是辅助函数 $F(x)$ 在定义域端点处的函数值或极限值(如果定义域两边都是闭的，就求两边的函数值；如果定义域一边开一边闭，那就开的那边求极限值，闭的那边求函数值；如果定义域两边都是开的，就求两边的极限值)。

本题中，先求第一种值，即极值。

由于 $F(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}\mathrm{d}t$，所以 $F'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2}$，令 $-\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2} = 0$，解得 $x = \frac{1}{2}$，所以驻点是 $x = \frac{1}{2}$。而在函数 $F(x)$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内 $F'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2}$ 明显不存在没有定义的点。

下面就用 $x = \frac{1}{2}$ 将定义域 $(-\infty, +\infty)$ 划分为两个区域：$(-\infty, \frac{1}{2})$，$(\frac{1}{2}, +\infty)$。

先在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 中任取一点，然后代入 $F'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2}$ 中，发现小于 0，所以函数 $F(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}\mathrm{d}t$ 在区间 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上单调递减。

再在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 中任取一点，然后代入 $F'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2}$ 中，发现大于 0，所以函数 $F(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}\mathrm{d}t$ 在区间 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增。

点 $x = \frac{1}{2}$ 属于“左减右增”，所以是一个极小值点。

极小值点 $x = \frac{1}{2}$ 所对应的极小值为

$$F(\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{1}^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{4}}^{1}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t-(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t)$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$$

再来求第二种值，也就是辅助函数 $F(x)$ 在定义域端点处的函数值或极限值。

由于辅助函数 $F(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，两边都是开区间，所以要算的是两个极限值。通过计算可知

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}(\int_{x}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{1}^{x^2}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(\int_{x}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{1}^{x^2}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t)=+\infty$$

第四步：写两行东西。

第一行从左到右写：定义域的左端点、最小的极值点、第二小的极值点、…、最大的极值点、定义域的右端点。

第二行从左到右写：定义域的左端点对应的函数值或极限值、最小的极值点对应的极值、第二小的极值点对应的极值、…、最大的极值点对应的极值、定义域的右端点对应的函数值或极限值。

然后，看第二行相邻的数。

如果异号，说明这两个相邻的点之间存在一个交点或者实根。

如果同号，说明这两个相邻的点之间不存在交点或实根。

如果这两个相邻的数中有一个是 0，那么算同号，说明这两个相邻的点之间不存在交点或实根，但 0 这个点本身算是一个交点或实根。

如果这两个相邻的数都是 0，那么算同号，说明这两个相邻的点之间不存在交点或实根，但这两个 0 点本身算是两个交点或实根。

对于本题而言，情况如下：

| | | |
|---|---|---|
| $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$ | $+\infty$ |

注：$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$ 肯定是小于 0 的，因为 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t<0$（在区间$(\frac{1}{2},1)$上 $\sqrt{1+t^2}<\sqrt{1+t}$）并且 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t>0$。

第二行最左侧的两个是 $+\infty$ 和 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$，由于异号，所以 $(-\infty,\frac{1}{2})$ 内有一个实根。再看 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$ 和 $+\infty$，由于异号，所以 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内也有一个实根。

综上所述，函数 $F(x)=\int_{x}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{1}^{x^2}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$ 有两个实根，即函数 $f(x)=\int_{x}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{1}^{x^2}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$ 有两个零点。

(20)(本题满分 11 分)

已知高温物体置于低温介质中，任一时刻物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比，现将一初始温度为 120℃ 的物体放在 20℃ 恒温介质中冷却，30min 后该物体温度降至 30℃。若要将该物体的温度继续降至 21℃，还需冷却多长时间?

**解:** 记该物体的温度与时刻 $t$ 之间的关系式为 $x=f(t)$。

已知任一时刻物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比。

“任一时刻物体温度对时间的变化率”的数学符号是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，“该时刻物体和介质的温差”的数学符号是 $(x-20)$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k(x-20)$$

其中 $k$ 大于 0。

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k(x-20)$ 是一个一阶微分方程，用可分离变量法可以轻易解得

$$x=20+C\mathrm{e}^{kt}$$

初始温度为 120℃，这意味着当 $t=0$ 时 $x=120$，把 $\begin{cases}t=0\\x=120\end{cases}$ 代入 $x=20+C\mathrm{e}^{kt}$ 中，解得 $C=100$，所以有 $x=20+100\mathrm{e}^{kt}$。

30min 后该物体温度降至 30℃，这意味着当 $t=30$ 时 $x=30$，把 $\begin{cases}t=30\\x=30\end{cases}$ 代入 $x=20+100\mathrm{e}^{kt}$ 中，解得 $k=-\frac{\ln 10}{30}$，所以有 $x=20+100\mathrm{e}^{-\frac{\ln 10\times t}{30}}$。

本题的问题是“若要将该物体的温度继续降至 21℃，还需冷却多长时间”，所以将 $x=21$ 代入 $x=20+100\mathrm{e}^{-\frac{\ln 10\times t}{30}}$ 中，解得 $t=60$。

如果有的同学认为本题的答案就是“60 分钟”，那就错了，因为本题问的是“还需”而不

是“需”。

由于 $60-30=30$，所以还需冷却30分钟。

（21）（本题满分11分）

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有2阶导数，$f(a)=0$，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$。设 $b>a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 $x$ 轴的交点是 $(x_0,0)$，证明 $a<x_0<b$。

**解：** 先来证明 $x_0<b$。

很明显，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线方程为 $y-f(b)=f'(b)(x-b)$。令 $y=0$，就得出该切线与 $x$ 轴的交点的横坐标 $b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$。

该切线与 $x$ 轴的交点的横坐标为 $x_0$，所以有 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$。已知 $f'(x)>0$，这说明 $f(x)$ 单调递增。

已知 $b>a$，由于 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(b)>f(a)$。

又已知 $f(a)=0$，所以 $f(b)>0$。

由于 $f'(x)>0$，可以推出 $f'(b)>0$。

于是必然有 $\dfrac{f(b)}{f'(b)}>0$。所以 $b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$。

由于 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$，而 $b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$，所以 $x_0<b$。

再来证明 $x_0>a$。

由拉格朗日中值定理可知

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\quad a<\xi<b \tag{1}$$

由于 $f(a)=0$，所以(1)式可以变为

$$f(b)=f'(\xi)(b-a) \tag{2}$$

由于 $f''(x)>0$，说明 $f'(x)$ 单调递增，而 $\xi<b$，所以 $f'(\xi)<f'(b)$。

由于 $a<b$，所以 $b-a>0$。

由于 $f'(\xi)<f'(b)$ 且 $b-a>0$，所以

$$f'(\xi)(b-a)<f'(b)(b-a) \tag{3}$$

(2)式、(3)式相结合，得

$$f(b)<f'(b)(b-a) \tag{4}$$

由于 $f'(b)>0$，所以(4)式的两侧同时乘以 $\dfrac{1}{f'(b)}$，不等号不改变，即

$$\frac{f(b)}{f'(b)}<(b-a) \tag{5}$$

(5)式可以整理为

$$b-\frac{f(b)}{f'(b)}>a \tag{6}$$

由于 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$，结合(5)式，有

$$x_0>a \tag{7}$$

综上所述，$x_0<b$，$x_0>a$，所以 $a<x_0<b$。

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$。

(Ⅰ)求 $a$ 的值。

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{X}$。

**解：**本题有两问，先来看第(I)问。

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，根据矩阵乘法可知矩阵 $\boldsymbol{A}^3$ 也是 3 阶方阵，已知 $\boldsymbol{A}^3$ 是零矩阵，那么矩阵 $\boldsymbol{A}^3$ 所对应的行列式也肯定是 0，即

$$|\boldsymbol{A}^3|=0 \tag{1}$$

而 $|\boldsymbol{A}^3|$ 可以写为

$$|\boldsymbol{A}^3|=|\boldsymbol{A}|\times|\boldsymbol{A}|\times|\boldsymbol{A}| \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$|\boldsymbol{A}|\times|\boldsymbol{A}|\times|\boldsymbol{A}|=0 \tag{3}$$

由(3)式立刻可以解得

$$|\boldsymbol{A}|=0 \tag{4}$$

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{pmatrix}$，所以

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{vmatrix} \tag{5}$$

(4)式、(5)式相结合，得

$$\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{vmatrix}=0 \tag{6}$$

由(6)式立刻可以解得

$$a = 0 \tag{7}$$

再来看第(Ⅱ)问。

已知

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E} \tag{8}$$

(8)式可以整理为

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{E} \tag{9}$$

(9)式可以进一步整理为

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{E} \tag{10}$$

将(10)式的等式左右两侧同时左乘$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$,同时右乘$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1}$,得

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1} \tag{11}$$

(11)式可以整理为

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1} \tag{12}$$

由于矩阵$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,所以矩阵$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,矩阵$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,矩阵$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,矩阵$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

把$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$代入(12)式,得

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

计算得

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

(23)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$。

(Ⅰ)求 $a$、$b$ 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵。

**解**:先来看第(Ⅰ)问。

已知矩阵 $A$ 相似于矩阵 $B$,于是可以推出:

① 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 所对应的行列式 $|\boldsymbol{B}|$。

② 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角线上的三个数字之和等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对角线上的三个数字之和。

根据①有 $\begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}$,通过计算可知 $\begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=-3+2a$,$\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}=b$,所以有

$$-3+2a=b \tag{1}$$

根据②有 $0+3+a=1+b+1$,化简得

$$3+a=2+b \tag{2}$$

(1)式、(2)式联立,有方程组

$$\begin{cases}-3+2a=b\\3+a=2+b\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$$

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$。我们知道,对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角线上的数就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,而矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的每一列分别为对应的线性无关的特征向量。

先来求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值。

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$,而在第(Ⅰ)问中已经求出了 $a=4$,所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{pmatrix}$。

由于 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以 $\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-\lambda&2&-3\\-1&3-\lambda&-3\\1&-2&4-\lambda\end{pmatrix}$，

$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&-3\\-1&3-\lambda&-3\\1&-2&4-\lambda\end{vmatrix}$。

令 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$，即 $\begin{vmatrix}-\lambda&2&-3\\-1&3-\lambda&-3\\1&-2&4-\lambda\end{vmatrix}=0$

根据行列式的计算方法，得：

$$(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=5$（千万不要写成 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=5$，因为 $(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$ 相当于 $(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$）。

再来针对不同的特征值求其对应的特征向量。

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时：

齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$。解出方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 的通解即可(但不要忘记通解中的任意常数不能同时为0)。

(1)将 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 中的 $\boldsymbol{A}$ 化为矩阵的形式并求秩。

$$\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$r=1。$$

(2)判断解的类型。

由于 $r<n$，所以此齐次方程组有无穷多解。

(3)求解。

$-x_1+2x_2-3x_3=0$。因为 $n-r=2$，所以取 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，解得 $x_3=0$；取 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$，解得 $x_3=1$。

所以此方程组的基础解系为 $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$。

方程组的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 $k_1$、$k_2$ 是任意常数。

所以特征值 1 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 $k_1$、$k_2$ 是不同时为零的任意常数。

由此可知，特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 所对应的特征向量有无数个，但是这无数个特征向量所组成的向量组的最大无关组中只含两个向量。也就是说，虽然特征值 1 对应着无数个特征向量，但是从中选出 $a(a > 2)$ 个特征向量，则这 $a$ 个特征向量一定是线性相关的。

当 $\lambda_3 = 5$ 时：

齐次方程组 $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\vec{\xi} = \vec{0}$ 变为 $(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\vec{\xi} = \vec{0}$，解出方程组 $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E})\vec{\xi} = \vec{0}$ 的通解即可。

(1) 将 $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E})\vec{\xi} = \vec{0}$ 中的 $\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E}$ 化为矩阵的形式并求秩。

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r = 2。$$

(2) 判断解的类型。

由于 $r < n$，所以此齐次方程组有无穷多解。

(3) 求解。

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

因为 $n - r = 1$，所以取 $x_2 = -1$，解得 $x_1 = -1$，$x_3 = 1$。

所以此方程组的基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

方程组的通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 $k$ 是任意常数。

所以特征值 5 对应的特征向量为 $k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 $k$ 是不为零的任意常数。

由此可知，特征值 $\lambda_3 = 5$ 所对应的特征向量有无数个。但是这无数个特征向量所组成的向量组的最大无关组中只含一个向量。也就是说，虽然特征值 5 对应着无数个特征向量，

但是从中选出 $a(a>1)$ 个特征向量，则这 $a$ 个特征向量一定是线性相关的。

综上所述，我们已经求出了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=5$，并且求出了特征值 1 所对应的全部特征向量为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，特征值 5 所对应的全部特征向量为 $k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

所以，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$（其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$）。

# 2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题及精解

## 一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 当 $x \to 0^+$ 时，若 $\ln^a(1+2x)$、$(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$ 均是比 $x$ 高阶的无穷小，则 $a$ 的取值范围是(　　)。

(A) $(2, +\infty)$　　(B) $(1, 2)$

(C) $(\frac{1}{2}, 1)$　　(D) $(0, \frac{1}{2})$

**解：** 由于当 $x \to 0^+$ 时，$\ln^a(1+2x)$ 是比 $x$ 高阶的无穷小，根据高阶无穷小的定义可得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^a(1+2x)}{x}=0 \tag{1}$$

由于在 $x \to 0^+$ 时，$\ln(1+2x)$ 和 $2x$ 是等价无穷小，所以(1)式可以化为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(2x)^a}{x}=0 \tag{2}$$

(2)式可以化为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^a x^a}{x}=0 \tag{3}$$

我们知道，只有当 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2^a x^a}{x}$ 中的 $a$ 大于 1 的时候，才有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2^a x^a}{x}=0$，所以

$$a>1 \tag{4}$$

由于当 $x \to 0^+$ 时，$(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$ 是比 $x$ 高阶的无穷小，根据高阶无穷小的定义，有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}}{x}=0 \tag{5}$$

由于在 $x \to 0^+$ 时，$1-\cos x$ 和 $\frac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小，所以(5)式可以化为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{a}}}{x}=0 \tag{6}$$

(6)式可以化为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}x^{\frac{2}{a}}}{x}=0 \tag{7}$$

我们知道，只有当 $\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}x^{\frac{2}{a}}}{x}$ 中的 $\frac{2}{a}$ 大于1 的时候，才有 $\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}x^{\frac{2}{a}}}{x}=0$，所以 $\frac{2}{a}>1$。

本题所给的四个选项，$a$ 肯定都大于0，所以将 $\frac{2}{a}>1$ 的两侧同时乘以 $a$，不等号不改变。便有

$$2>a \tag{8}$$

(4)式、(8)式相结合，可得 $1<a<2$，所以本题应该选择(B)选项。

(2)下列曲线中有渐近线的是(　　)。

(A) $y=x+\sin x$　　(B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$　　(D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

**解**：渐近线分为三种：水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线。现在先来给大家讲一下这三种渐近线的求法。

先来看水平渐近线的求法。

已知函数 $f(x)$，要求该函数的水平渐近线时，需要分 $x\to+\infty$和 $x\to+\infty$两种情况。

$x\to+\infty$的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，若结果是“常数 $a$”，则 $y=a$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

$x\to-\infty$的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，若结果是“常数 $b$”，则 $y=b$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线(如果“常数 $a$ = 常数 $b$”的话，那么 $y=a$ 和 $y=b$ 就是同一条水平渐近线)。

再来看铅直渐近线的求法。

已知函数 $f(x)$，要求该函数的铅直渐近线时，需要找一种点，即函数 $f(x)$ 在该点处没有定义，但是存在一个该点的左去心邻域(或者存在一个该点的右去心邻域，或者存在一个该点的去心邻域)，函数 $f(x)$ 在该邻域内有定义。

我们把找到的点记为 $x_0$。

然后计算 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，如果这两者的计算结果中至少有一个是 $\infty$，就说明 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的铅直渐近线。

最后看斜渐近线的求法。

已知函数$f(x)$，要求该函数的斜渐近线时，需要分$x \to +\infty$和$x \to -\infty$两种情况。

$x \to +\infty$的情况：

计算$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$，若结果是“非零常数$a$”，再计算$\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x) - ax]$，若结果是“常数$b$”，则$y = ax + b$就是函数$f(x)$的一条水平渐近线。

$x \to -\infty$的情况：

计算$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$，若结果是“非零常数$c$”，再计算$\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x) - cx]$，若结果是“常数$d$”，则$y = cx + d$就是函数$f(x)$的一条水平渐近线(如果“常数$a$ = 常数$b$”、“常数$c$ = 常数$d$”，那$y = ax + b$和$y = cx + d$就是同一条斜渐近线)。

现在，水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线的求法都已经介绍了。下面正式来看本题。

首先来看(A)选项。

(A)选项的函数是$y = x + \sin x$。

先看函数$y = x + \sin x$有没有水平渐近线。

$x \to +\infty$的情况：

$\lim\limits_{x \to +\infty}(x + \sin x) = +\infty \neq$ 常数

$x \to -\infty$的情况：

$\lim\limits_{x \to -\infty}(x + \sin x) = -\infty \neq$ 常数

综上所述，函数$y = x + \sin x$没有水平渐近线。

再看函数$y = x + \sin x$有没有铅直渐近线。

由于函数$y = x + \sin x$根本就不存在没有定义的点，所以没有铅直渐近线。

最后看函数$y = x + \sin x$有没有斜渐近线。

$x \to +\infty$的情况：

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x + \sin x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x + \sin x}{x} - 1 \times x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} - \lim_{x \to +\infty} x = 1 + 0 - (+\infty) = -\infty \neq \text{常数}$$

$x \to -\infty$的情况：

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x + \sin x}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x + \sin x}{x} - 1 \times x\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x} - x\right) = \lim_{x \to -\infty} 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} - \lim_{x \to -\infty} x = 1 + 0 - (-\infty) = +\infty \neq \text{常数}$$

综上所述，函数$y = x + \sin x$没有斜渐近线。

所以本题不能选择(A)选项。

接着来看(B)选项。

(B)选项的函数是 $y = x^2 + \sin x$。

先看函数 $y = x^2 + \sin x$ 有没有水平渐近线。

$x \to +\infty$ 的情况:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 + \sin x) = +\infty \neq \text{常数}$$

$x \to -\infty$ 的情况:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2 + \sin x) = +\infty \neq \text{常数}$$

综上所述,函数 $y = x^2 + \sin x$ 没有水平渐近线。

再看函数 $y = x^2 + \sin x$ 有没有铅直渐近线。

由于函数 $y = x^2 + \sin x$ 根本就不存在没有定义的点,所以没有铅直渐近线。

最后看函数 $y = x^2 + \sin x$ 有没有斜渐近线。

$x \to +\infty$ 的情况:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 + \sin x}{x}\right) = +\infty \neq \text{非零常数}$$

$x \to -\infty$ 的情况:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2 + \sin x}{x}\right) = -\infty \neq \text{非零常数}$$

综上所述,函数 $y = x^2 + \sin x$ 没有斜渐近线。

所以本题不能选择(B)选项。

接着来看(C)选项。

(C)选项的函数是 $y = x + \sin\frac{1}{x}$。

先看函数 $y = x + \sin\frac{1}{x}$ 有没有水平渐近线。

$x \to +\infty$ 的情况:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + \sin\frac{1}{x}\right) = +\infty \neq \text{常数}$$

$x \to -\infty$ 的情况:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x + \sin\frac{1}{x}\right) = -\infty \neq \text{常数}$$

综上所述,函数 $y = x + \sin\frac{1}{x}$ 没有水平渐近线。

再看函数 $y = x + \sin\frac{1}{x}$ 有没有铅直渐近线。

由于 $x=0$ 是函数 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 的没有定义的点，所以需要计算一下 $\lim\limits_{x\to0^+}(x+\sin\frac{1}{x})$ 和 $\lim\limits_{x\to0^-}(x+\sin\frac{1}{x})$。

$\lim\limits_{x\to0^+}(x+\sin\frac{1}{x})$ = 不存在但不为∞

$\lim\limits_{x\to0^-}(x+\sin\frac{1}{x})$ = 不存在但不为∞

综上所述，函数 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 没有铅直渐近线。

最后看函数 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 有没有斜渐近线。

$x\to+\infty$ 的情况：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sin\frac{1}{x}-x\right)=0$$

所以函数 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y=x$。

$x\to-\infty$ 的情况：

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sin\frac{1}{x}-x\right)=0$$

所以函数 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y=x$。

综上所述，函数 $y=x^2+\sin x$ 有斜渐近线 $y=x$。

由于(C)选项所给的函数既虽然没有水平渐近线和铅直渐近线，但却有斜渐近线，所以本题应该选择(C)选项。

最后来看(D)选项。

(D)选项的函数是 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$。

先看函数 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 有没有水平渐近线。

$x\to+\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+\sin\frac{1}{x})=+\infty\neq$ 常数

$x \to -\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 + \sin\frac{1}{x}) = +\infty \neq$ 常数

综上所述，函数 $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$ 没有水平渐近线。

再看函数 $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$ 有没有铅直渐近线。

由于 $x = 0$ 是函数 $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$ 的没有定义的点，所以需要计算一下 $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2 + \sin\frac{1}{x})$ 和 $\lim\limits_{x\to0^-}(x^2 + \sin\frac{1}{x})$。

$\lim\limits_{x\to0^+}(x^2 + \sin\frac{1}{x}) =$ 不存在但不为$\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}(x^2 + \sin\frac{1}{x}) =$ 不存在但不为$\infty$

综上所述，函数 $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$ 没有铅直渐近线。

最后看函数 $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$ 有没有斜渐近线。

$x \to +\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 + \sin\frac{1}{x}}{x}\right) = +\infty \neq$ 非零常数

$x \to -\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2 + \sin\frac{1}{x}}{x}\right) = -\infty \neq$ 非零常数

综上所述，函数 $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$ 没有斜渐近线。

所以本题不能选择(D)选项。

综上所述，本题应该选择(C)选项。

(3)设函数$f(x)$具有 2 阶导数，$g(x) = f(0)(1 - x) + f(1)x$，则在区间$[0, 1]$上(　　)。

(A)当$f'(x) \geqslant 0$时，$f(x) \geqslant g(x)$　　(B)当$f'(x) \geqslant 0$时，$f(x) \leqslant g(x)$

(C)当$f''(x) \geqslant 0$时，$f(x) \geqslant g(x)$　　(D)当$f''(x) \geqslant 0$时，$f(x) \leqslant g(x)$

**解**：先设一个辅助函数 $F(x) = f(x) - g(x)$。

现在来计算一下 $F(0)$。

由于 $F(x)=f(x)-g(x)$，所以 $F(0)=f(0)-g(0)$。

而 $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，所以 $g(0)=f(0)(1-0)+f(1)\times 0=f(0)$。

由于 $g(0=f(0)$，所以 $F(0)=f(0)-g(0)=f(0)-f(0)=0$。

再来计算一下 $F(1)$。

由于 $F(x)=f(x)-g(x)$，所以 $F(1)=f(1)-g(1)$。

而 $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，所以 $g(1)=f(0)(1-1)+f(1)\times 1=f(1)$。

由于 $g(1)=f(1)$，所以 $F(1)=f(1)-g(1)=f(1)-f(1)=0$。

再来计算一下 $F''(x)$。

由于 $F(x)=f(x)-g(x)$，所以 $F'(x)=f'(x)+f(0)-f(1)$，$F''(x)=f''(x)$。

现在来看一下(D)选项。

(D)选项中说在区间 $[0,1]$ 上 $f''(x)\geqslant 0$，由于前面已经推出 $F''(x)=f''(x)$，所以在区间 $[0,1]$ 上，$F''(x)\geqslant 0$。

这说明函数 $F'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是单调不减的(根据导函数的正负推原函数的单调性)。

之前已经证明 $F(0)=F(1)$，根据罗尔定理可知，在区间 $[0,1]$ 上存在一点 $c$，使得 $F'(c)=0$。

所以可以推出以下结论：

当 $0\leqslant x\leqslant c$ 时，有 $F'(x)\leqslant 0$。

当 $c\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $F'(x)\geqslant 0$。

情况 1：当 $0\leqslant x\leqslant c$ 时。

由于有 $F'(x)\leqslant 0$，所以可知：当 $0\leqslant x\leqslant c$ 时，$F(x)$ 单调不增。而前面已经计算出 $F(0)=0$，所以可知：当 $0\leqslant x\leqslant c$ 时，$F(x)\leqslant 0$。

情况 2：当 $c\leqslant x\leqslant 1$ 时。

由于有 $F'(x)\geqslant 0$，所以可知：当 $c\leqslant x\leqslant 1$ 时，$F(x)$ 单调不减。而前面已经计算出 $F(1)=0$，所以可知：当 $c\leqslant x\leqslant 1$ 时，$F(x)\leqslant 0$。

综合“情况 1”和“情况 2”，有如下结论：

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$F(x)\leqslant 0$。

由于 $F(x)\leqslant 0$，且 $F(x)=f(x)-g(x)$，所以有 $f(x)-g(x)\leqslant 0$，移项得 $f(x)\leqslant g(x)$。所以本题应该选择(D)选项。

(4)曲线 $\begin{cases}x=t^2+7\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是(　　)。

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{50}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{10}}{100}$

(C) $10\sqrt{10}$　　(D) $5\sqrt{10}$

**解**：要想解答本题，就必须知道曲率的公式 $K=\left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$。下面就来本题。

先求 $y'$。

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\times\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=(2t+4)\times\frac{1}{2t}=\frac{2t+4}{2t}=\frac{t+2}{t}$$

再求 $y''$。

$$y''=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{t+2}{t}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{t+2}{t}\right)}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{t+2}{t}\right)}{\mathrm{d}t}\times\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\frac{2}{t^2}\times\frac{1}{2t}=-\frac{1}{t^3}$$

所以曲率 $K=\left|\dfrac{-\frac{1}{t^3}}{\left[1+\left(\frac{t+2}{t}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right|$。已知 $t=1$，所以 $K|_{t=1}=\left|\dfrac{-\frac{1}{1^3}}{\left[1+\left(\frac{1+2}{1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right|=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$。

我们求得的是“曲率”，而本题要求的是“曲率半径”，这两者是互为倒数的关系。

所以曲率半径为 $10\sqrt{10}$。

本题应该选择(C)选项。

(5)设函数 $f(x)=\arctan x$。若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=(\quad)$。

(A) 1　　(B) $\dfrac{2}{3}$

(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

**解**：已知

$$f(x)=xf'(\xi)\tag{1}$$

由于

$$f(x)=\arctan x\tag{2}$$

所以(1)式、(2)式相结合，得

$$\arctan x=xf'(\xi)\tag{3}$$

由(2)式可知

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\tag{4}$$

把(4)式中的 $x$ 换成 $\xi$ 表示，则有

$$f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2} \tag{5}$$

(3)式、(5)式相结合，得

$$\arctan x=\frac{x}{1+\xi^2} \tag{6}$$

由(6)式可以解得

$$\xi^2=\frac{x}{\arctan x}-1 \tag{7}$$

将(7)式代入 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}$ 中，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\arctan x}-1}{x^2} \tag{8}$$

(8)式可以化简为

$$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x} \tag{9}$$

由于当 $x\to0$ 时，$\arctan x$ 和 $x$ 是等价无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}$ 可以变为

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3} \tag{10}$$

(9)式、(10)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3} \tag{11}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$ 是“$\frac{0}{0}$ 型”函数极限，所以可以对其使用洛必达法则。所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} \tag{12}$$

(11)式、(12)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} \tag{13}$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$ 可以化简为

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} \tag{14}$$

(13)式、(14)式相结合，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} \tag{15}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{3x^2(1+x^2)}$ 可以化简为

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} \tag{16}$$

(15)式、(16)式相结合，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} \tag{17}$$

由代入法可知

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3(1+0)} = \frac{1}{3} \tag{18}$$

(17)式、(18)式相结合，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \frac{1}{3} \tag{19}$$

所以本题应该选择(D)选项。

(6)设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续，在 $D$ 的内部具有 2 阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，则(　　)。

(A) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 $D$ 的边界上取得

(B) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 $D$ 的内部取得

(C) $u(x, y)$ 的最大值在 $D$ 的内部取得，最小值在 $D$ 的边界上取得

(D) $u(x, y)$ 的最小值在 $D$ 的内部取得，最大值在 $D$ 的边界上取得

**解：** $u(x, y)$ 是一个二元函数，在闭区域 $D$ 上连续，说明肯定有最大值和最小值。

二元函数的最大值和最小值或者是在区域内部的极值点取得，或者是在区域边界取得。

由于 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$，说明 $B \neq 0$。又由于 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，说明 $A$ 和 $C$ 是异号的。那么就必然有 $AC - B^2 < 0$。

根据求二元函数极值点的方法可知，该二元函数根本就不存在极值点，也就是说最大值和最小值都不可能在区域内部的极值点取得。又因为该二元函数肯定有最大值和最小值，所以最大值和最小值都是在 $D$ 的边界上取得的。

所以本题应该选择(A)选项。

(7)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ (　　)。

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$　　(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

**解**：本题非常简单，因为至少可以用“最笨的方法”来做：选一行或者一列，然后降阶。而我要告诉大家一种更便捷的方法。

互换行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 的第二行和第三行，得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \tag{1}$$

互换行列式 $-\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 的第一列和第三列，得

$$-\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} \tag{3}$$

记矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$，记矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，记矩阵 $\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$（注意：只有零矩阵才可以记成 $\boldsymbol{O}$）。则 $\begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$ 可以写为

$$\begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \tag{5}$$

现在告诉大家两个关于分块行列式计算的公式。

第一个公式：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{m\times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{m\times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}_{m\times m} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$。

第二个公式：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$。

利用第一个公式，可知

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \times |\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2 \tag{6}$$

(5)式、(6)式相结合，得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2 \tag{7}$$

所以本题应该选择(B)选项。

(8)设 $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}$ 均为 3 维向量，则对任意常数 $k$、$l$ 而言，向量组 $\vec{\alpha_1}+k\vec{\alpha_3}, \vec{\alpha_2}+l\vec{\alpha_3}$ 线性无关是向量组 $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}$ 线性无关的(　　)。

(A)必要非充分条件

(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件

(D)既非充分也非必要条件

**解**：为了方便表示，记 $\vec{\beta_1} = \vec{\alpha_1}+k\vec{\alpha_3}, \vec{\beta_2} = \vec{\alpha_2}+l\vec{\alpha_3}$。于是有以下等式成立：

$$(\vec{\beta_1}, \vec{\beta_2}) = (\vec{\alpha_1}+k\vec{\alpha_3}, \vec{\alpha_2}+l\vec{\alpha_3}) = (\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$$

对于本题，既要考察充分性又要考察必要性。

先来考察一下必要性，也就是假设 $\vec{\alpha_1}$，$\vec{\alpha_2}$，$\vec{\alpha_3}$ 线性无关，看是否能推出 $\vec{\beta_1}$，$\vec{\beta_2}$ 线性无关。考察必要性如下：

由于向量组 $\vec{\alpha_1}$，$\vec{\alpha_2}$，$\vec{\alpha_3}$ 线性无关，说明向量组 $\vec{\alpha_1}$，$\vec{\alpha_2}$，$\vec{\alpha_3}$ 的秩为 3。

而向量组的秩等于矩阵的秩，所以矩阵 $(\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3})$ 的秩为 3。

矩阵 $(\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3})$ 是三阶方阵，那么秩为 3 就说明它是满秩矩阵。

矩阵满秩和矩阵可逆是可以互推的，所以矩阵 $(\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3})$ 是可逆矩阵。

可逆矩阵可以写为若干个初等矩阵的乘积，所以有：$(\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}) = \boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{P}_n$，其中 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_n$ 均为初等矩阵。所以 $(\vec{\beta_1}, \vec{\beta_2}) = (\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{P}_n \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$。

而初等矩阵在左边乘以某矩阵就相当于对该矩阵进行了一次相应的初等行变换，所以矩阵 $(\vec{\beta_1}, \vec{\beta_2})$ 是矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$ 进行了若干次初等行变换之后得到的。

而初等变换是不改变矩阵的秩的，所以矩阵 $(\vec{\beta_1}, \vec{\beta_2})$ 和矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$ 的秩一定是相等的。

而无论 $k$、$l$ 取何值，矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$ 的秩都肯定是 2，即矩阵 $(\vec{\beta_1}, \vec{\beta_2})$ 肯定是 2。那么向量组 $\vec{\beta_1}$，$\vec{\beta_2}$ 的秩就是 2，所以向量组 $\vec{\beta_1}$，$\vec{\beta_2}$ 线性无关。

再来考察一下充分性，也就是假设 $\vec{\beta_1}$，$\vec{\beta_2}$ 线性无关，看是否能推出 $\vec{\alpha_1}$，$\vec{\alpha_2}$，$\vec{\alpha_3}$ 线性无关。考察充分性如下：

由于有"$\vec{\beta_1}$，$\vec{\beta_2}$ 线性无关"和"$\vec{\beta_1} = \vec{\alpha_1} + k\vec{\alpha_3}$，$\vec{\beta_2} = \vec{\alpha_2} + l\vec{\alpha_3}$（其中 $k$、$l$ 为任意常数）"这两个前提存在，所以设 $\vec{\alpha_1}$，$\vec{\alpha_2}$ 线性无关且 $\vec{\alpha_3} = \vec{0}$。

鉴于有一部分同学不明白为什么可以这么设，所以现在来验证一下：由于 $\vec{\beta_1} = \vec{\alpha_1} + k\vec{\alpha_3}$，$\vec{\beta_2} = \vec{\alpha_2} + l\vec{\alpha_3}$，所以当 $\vec{\alpha_3} = \vec{0}$ 时，有 $\vec{\beta_1} = \vec{\alpha_1}$，$\vec{\beta_2} = \vec{\alpha_2}$。如果 $\vec{\alpha_1}$，$\vec{\alpha_2}$ 线性无关，则 $\vec{\beta_1}$，$\vec{\beta_2}$ 肯定线性无关(因为此时 $\vec{\beta_1}$ 就是 $\vec{\alpha_1}$，$\vec{\beta_2}$ 就是 $\vec{\alpha_2}$)。

验证完毕，说明设“$\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$ 线性无关且 $\overrightarrow{\alpha_3} = \vec{0}$”这个特例没有问题。

那么，$\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$，$\overrightarrow{\alpha_3}$ 是线性无关的吗？显然不是，因为 $\overrightarrow{\alpha_3} = \vec{0}$，一个向量组只要含有零向量，它就一定是线性相关的。

这就说明 $\overrightarrow{\beta_1}$，$\overrightarrow{\beta_2}$ 线性无关无法推出 $\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$，$\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性无关，也就是说不满足充分性。

综上所述，由于满足“必要性”而不满足“充分性”，所以向量组 $\overrightarrow{\alpha_1}+k\overrightarrow{\alpha_3}$，$\overrightarrow{\alpha_2}+l\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性无关是向量组 $\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$，$\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性无关的必要非充分条件，本题选择(A)选项。

## 二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x =$ ________。

**解：** $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$ 可以写为

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{4+(x+1)^2}\mathrm{d}x \tag{1}$$

将 $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{4+(x+1)^2}\mathrm{d}x$ 的被积函数的分子分母同时乘以 $\frac{1}{4}$，得

$$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x \tag{3}$$

将 $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$ 的 d 后面写为 $\frac{x+1}{2}$，那么最前面就要乘以 2，于是有

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{2}\right) \tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{2}\right) \tag{5}$$

由公式 $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$ 可知

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{1+(\frac{x+1}{2})^{2}}\mathrm{d}(\frac{x+1}{2})=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1} \tag{6}$$

(5)式、(6)式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^{2}+2x+5}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1} \tag{7}$$

计算可得

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{3}{8}\pi \tag{8}$$

(7)式、(8)式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^{2}+2x+5}\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\pi \tag{9}$$

所以本题应填 $\frac{3}{8}\pi$。

(10)设 $f(x)$ 是周期为4的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则 $f(7)=$ ________。

**解**：本题的解题思路非常清晰：先求出函数 $f(x)$，然后再求出 $f(7)$。

先来求函数 $f(x)$。

对 $f'(x)$ 进行积分。由于 $f'(x)=2(x-1)$，所以有：$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=x^{2}-2x+C$，其中 $C$ 为任意常数。

那么，$f(x)$ 等于 $x^{2}-2x+C$ 吗？当然不是。因为 $x^{2}-2x+C$ 是函数 $f'(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的所有原函数，而 $f(x)$ 只是这无数个原函数中的一个。换句话说，$f(x)=x^{2}-2x+C_{1}$，其中 $C_{1}$ 是一个特定的数。

那么 $f(x)$ 应该如何求呢？由于 $f(x)$ 是奇函数，必有 $f(0)=0$，现在就要利用“$f(0)=0$”来求 $f(x)$。

将 $f(0)=0$ 代入 $f(x)=x^{2}-2x+C_{1}$ 中，得 $0=0+0+C_{1}$，解得 $C_{1}=0$，所以 $f(x)=x^{2}-2x$，$x\in[0,2]$。

现在再来求 $f(7)$。

有的同学认为，既然 $f(x)=x^{2}-2x$，那么自然 $f(7)=7^{2}-2\times7=35$。这种想法是完全错误的，因为函数 $f(x)=x^{2}-2x$ 的定义域是 $x\in[0,2]$，而7根本不在区间 $[0,2]$ 上，所以这种想法是错误的。

那么应该如何求 $f(7)$ 呢？由于 $f(x)$ 是周期为4的周期函数，所以必有

$$f(7)=f(3+4)=f(3)=f(-1+4)=f(-1)$$

而 $f(x)$ 是奇函数，那么就有 $f(-1)=-f(1)$。

综上所述，有 $f(7)=-f(1)$。

由于 1 在区间 $[0,2]$ 上，所以 $f(7)=-f(1)=-(1^2-2\times1)=1$。

本题应填 1。

（11）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$________。

**解：**本题是求 $dz|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$，我们知道 $dz|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}dx+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}dy$，所以本题实际是要求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$。

先来求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$。

已知 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$，将等式左右两侧同时对 $x$ 求导。

等式左侧 $e^{2yz}+x+y^2+z$ 对 $x$ 求导得：$e^{2yz}\cdot2y\frac{\partial z}{\partial x}+1+\frac{\partial z}{\partial x}$。

等式右侧 $\frac{7}{4}$ 对 $x$ 求导得：0。

所以有 $e^{2yz}\cdot2y\frac{\partial z}{\partial x}+1+\frac{\partial z}{\partial x}=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{e^{2yz}\cdot2y+1}$。

接下来求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$。有的同学说："直接把 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{e^{2yz}\cdot2y+1}$ 中就可以了"。可是，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{e^{2yz}\cdot2y+1}$ 中还含有 $z$，怎么办？所以不能直接把 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{e^{2yz}\cdot2y+1}$ 中，而应该先把 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 代入 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 中求出 $z$，然后再把 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 以及求得的 $z$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{e^{2yz}\cdot2y+1}$ 中，求出 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$。

先将 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 代入 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 中，解得 $z=0$。

再将 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，$z=0$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{e^{2yz}\cdot2y+1}$ 中，解得

$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$。

再来求 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$。

已知 $e^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$，将等式左右两侧同时对 $y$ 求导。

等式左侧 $e^{2yz}+x+y^2+z$ 对 $y$ 求导得：$e^{2yz}(2z+2y\dfrac{\partial z}{\partial y})+2y+\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

等式右侧 $\dfrac{7}{4}$ 对 $y$ 求导得：0。

所以有 $e^{2yz}(2z+2y\dfrac{\partial z}{\partial y})+2y+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-2y-e^{2yz}2z}{e^{2yz}2y+1}$。

接下来求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$。同理，应该先把 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ 代入 $e^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 中求出 $z$，然后再把 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ 以及求得的 $z$ 代入 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-2y-e^{2yz}2z}{e^{2yz}2y+1}$ 中，求出 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$。

先将 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ 代入 $e^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 中，解得 $z=0$。

再将 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$，$z=0$ 代入 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-2y-e^{2yz}2z}{e^{2yz}2y+1}$ 中，解得

$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\dfrac{1}{2}$。

所以有 $dz\big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}dy=-\dfrac{1}{2}dx+(-\dfrac{1}{2})dy$。

本题应填 $-\dfrac{1}{2}dx+(-\dfrac{1}{2})dy$。

(12)曲线 $L$ 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 $L$ 在点 $(r,\theta)=(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是________。

**解**：本题要求切线方程，必须知道切线方程的形式 $y-y_0=k(x-x_0)$。

现在需要求的就是 $x_0$、$y_0$、$k$。

直角坐标与极坐标的对应关系是 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$。已知 $r=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，所以有 $x_0=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，$y_0=\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$。

接下来求 $k$。由于 $r=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，所以有 $r=\theta$，可得 $\begin{cases}x=\theta\cos\theta\\y=\theta\sin\theta\end{cases}$，所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\times\dfrac{1}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$，$k=\dfrac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{2}{\pi}$。

综上所述，切线的直角坐标方程是 $y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$，化简得 $\frac{2}{\pi}x+y-\frac{\pi}{2}=0$。

所以本题应填 $\frac{2}{\pi}x+y-\frac{\pi}{2}=0$。

（13）一根长度为 1 的细棒位于 $x$ 轴的区间 $[0,1]$ 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$ ________。

**解：** 要想解答本题，就必须知道利用定积分来计算质心坐标的公式。

利用定积分来计算质心坐标的公式为 $\bar{x}=\dfrac{\int_a^b x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x}$。

对于本题就有

$$\bar{x}=\frac{\int_0^1 x(-x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1(-x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x} \tag{1}$$

通过计算可知

$$\int_0^1 x(-x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{11}{12} \tag{2}$$

$$\int_0^1(-x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{20}{12} \tag{3}$$

将(2)式、(3)式代入(1)式，得

$$\bar{x}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{20}{12}}=\frac{11}{20} \tag{4}$$

所以本题应填 $\frac{11}{20}$。

（14）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 $a$ 的取值范围是________。

**解：** 本题中出现了“负惯性指数”一词，先简单解释一下。

无论是“正惯性指数”还是“负惯性指数”，都并不是针对一个普通的二次型而言的，而是针对标准形而言的。具体来说：标准形中正平方项的个数称为正惯性指数，负平方项的个数称为负惯性指数。

本题所给的二次型是$f(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^2 - x_2{}^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$，显然不是标准形，已知其负惯性指数为1，这显然指的是该二次型所对应的标准形的负惯性指数为1。所以首先应该将这个二次型化为标准形。

化二次型为标准形的方法有两种，一是正交变换法，二是配方法，这里选择配方法。

由于这个二次型中含有三个未知数，所以要配三次。

第一次配方(配$x_1$)。

关注这六项中含$x_1$的项：$x_1^2 + 2ax_1x_3$，将其写为$k(x_1 + \Delta)^2 + X$的形式，其中常数$k$的取值与$x_1^2$的系数一样，$x_1^2 + 2ax_1x_3$中$x_1^2$的系数是1，所以$k = 1$。

$\Delta$的求法是$\dfrac{2ax_1x_3}{2kx_1} = \dfrac{2ax_1x_3}{2x_1} = ax_3$。

X的求法是用$x_1^2 + 2ax_1x_3 - k(x_1 + \Delta)^2$，所以$X = x_1^2 + 2ax_1x_3 - (x_1 + ax_3)^2 = -a^2x_3^2$。

综上所述，$x_1^2 + 2ax_1x_3$配完后变为$(x_1 + ax_3)^2 - a^2x_3^2$

所以

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1{}^2 - x_2{}^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= x_1{}^2 + 2ax_1x_3 - x_2{}^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + ax_3)2 - a^2x_3^2 - x_2{}^2 + 4x_2x_3 \end{aligned}$$

第二次配方(配$x_2$)。

$(x_1 + ax_3)^2$是配出来的，所以现在只需关注含$x_2$的项：$-x_2{}^2 + 4x_2x_3$。将其写为$k(x_2 + \Delta)^2 + X$的形式，其中常数$k$的取值与$x_2^2$的系数一样，$-x_2{}^2 + 4x_2x_3$中$x_2^2$的系数是$-1$，所以$k = -1$。

$\Delta$的求法是：$\dfrac{4x_2x_3}{2kx_2} = -2x_3$。

$X$的求法是用$-x_2{}^2 + 4x_2x_3 - k(x_2 + \Delta)^2$，所以$X = -x_2{}^2 + 4x_2x_3 - [-(x_2 - 2x_3)^2] = 4x_3{}^2$。

综上所述，$-x_2{}^2 + 4x_2x_3$配完后变为$-(x_2 - 2x_3)^2 + 4x_3{}^2$。

所以

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + ax_3)2 - a^2x_3^2 - x_2{}^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + ax_3)2 - x_2{}^2 + 4x_2x_3 - a^2x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)2 - (x_2 - 2x_3)2 + 4x_3{}^2 - a^2x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)2 - (x_2 - 2x_3)2 + (4 - a^2)x_3^2 \end{aligned}$$

第三次配方(配$x_3$)。

现在关注$(4 - a^2)x_3^2$，要将其写为$k(x_3 + \Delta)^2 + X$的形式。可以看出，$\Delta$和$X$都为0，$k$

是 $4-a^2$。

所以

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2。$$

由此可知，

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$ 就是二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^2-x_2{}^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 所对应的标准形。

由于 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$ 的负惯性指数为 1，所以在 1、$-1$、$4-a^2$ 这三个数中只有一个是负数。

已有 $-1$ 是负数，所以 $4-a^2$ 就一定不能是负数。于是有

$$4-a^2 \geqslant 0$$

解得 $-2 \leqslant a \leqslant 2$。

所以本题应填 $-2 \leqslant a \leqslant 2$。

## 三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$。

**解**：对分母使用等价无穷小可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\times\frac{1}{x}} \tag{1}$$

化简(1)式的分母可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\times\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x} \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x} \tag{3}$$

通过计算可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}x=\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t=\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x}$

属于“$\frac{\infty}{\infty}$”，可以对其使用洛必达法则，即分子分母同时求导，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x}{1}\tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x}{1}\tag{5}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x}{1}$可以化简为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]\tag{6}$$

(5)式、(6)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]\tag{7}$$

设$t=\frac{1}{x}$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$变为

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}\tag{8}$$

(7)式、(8)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}\tag{9}$$

通过计算可知$\lim\limits_{t\to0^+}t^2=0$，$\lim\limits_{t\to0^+}(e^t-1-t)$，所以$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}$属于“$\frac{0}{0}$”，可以对其使用洛必达法则，即分子分母同时求导，得

$$\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}\tag{10}$$

(9)式、(10)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}\tag{11}$$

对$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}$的分子使用等价无穷小，得

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \tag{12}$$

(11)式、(12)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2} \tag{13}$$

(16)（本题满分 10 分）

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值。

**解**：本题是求极值，可以按照求极值的方法来求。

下面正式来解答本题。

第一步：写出该函数的定义域。

本题中，定义域是 $(-\infty,+\infty)$，即 $x$ 的取值范围。

第二步：求两种点，即驻点和不可导点。

先来求不可导点。由于题中出现了 $y'$，说明该函数在整个定义域内都是可导的，不存在不可导点。

再来求驻点。

由于 $x^2+y^2y'=1-y'$，整理可得 $y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}$。令 $y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}=0$，解得驻点 $x=-1$ 和 $x=1$。

第三步：用求出的驻点和不可导点划分定义域。

用 $x=-1$、$x=1$ 划分定义域 $(-\infty,+\infty)$，可以划分为三个区域：$(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,+\infty)$。

第四步：每个区间内任取一个点，然后代入导函数中，根据导函数大于 0 还是小于 0 确定单调性。

在区间 $(-\infty,-1)$ 内任取一个点代入导函数 $y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}$ 中，发现 $y'<0$，所以函数 $y=y(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递减。

在区间 $(-1,1)$ 内任取一个点代入导函数 $y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}$ 中，发现 $y'>0$，所以函数 $y=y(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增。

在区间 $(1,+\infty)$ 内任取一个点代入导函数 $y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}$ 中，发现 $y'<0$，所以函数

$y=y(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减。

第五步：极值点肯定是取自驻点或者不可导点。具体来说就是看每个驻点和不可导点的两侧的区域的单调性。“左增右减”是极大值点，“左减右增”是极小值点，“同增同减”则不是极值点。

对于本题而言，情况如下：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |

先来看 $x=-1$ 这个点。第四步已经判断出它左侧的区间 $(-\infty,-1)$ 是单调递减区间，右侧的区间 $(-1,1)$ 是单调递增区间，所以 $x=-1$ 属于“左减右增”，是一个极小值点。

再来看 $x=1$ 这个点。第四步已经判断出它左侧的区间 $(-1,1)$ 是单调递增区间，右侧的区间 $(1,+\infty)$ 是单调递减区间，所以 $x=1$ 属于“左增右减”，是一个极大值点。

第六步：将求得的极值点代入函数中，算出函数值，即是极值。

本题中，首先应该把函数 $y=y(x)$ 求出来，然后才能代入。求函数 $y=y(x)$ 的方法是：求微分方程 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}$ 在题中所给的初始条件 $y(2)=0$ 下的特解。

将 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}$ 变为 $(1+y^2)\mathrm{d}y=(1-x^2)\mathrm{d}x$，通过可分离变量法解得通解为 $x^3+y^3-3x+3y=C$。由于 $y(2)=0$，所以可以确定 $C=2$。所以通解是 $x^3+y^3-3x+3y=2$。

极小值点 $x=-1$ 所对应的极小值计算方法如下：

$(-1)^3+y^3-3\times(-1)+3y=2$，解得 $y=0$，所以极小值点 $x=-1$ 所对应的极小值为 0。

极大值点 $x=1$ 所对应的极大值计算方法如下：

$1^3+y^3-3\times1+3y=2$，解得 $y=1$，所以极大值点 $x=1$ 所对应的极大值为 1。

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，计算 $\iint\limits_D \dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

**解**：由于本题会用到二重积分的轮换对称性，所以先给大家介绍一下二重积分的轮换对称性。

二重积分的轮换对称性是指：把二重积分的积分区域中的 $x$、$y$ 互换，再把二重积分的被积函数中的 $x$、$y$ 互换，所得到的新二重积分与原二重积分相等。

对于本题而言，由轮换对称性可知

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_S \frac{y\sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})}{y+x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

其中区域 $S$ 为 $S=\{(x,y)\mid 1\leqslant y^2+x^2\leqslant 4,\ y\geqslant 0,\ x\geqslant 0\}$。

对比区域 $D$ 和区域 $S$ 会发现，这两个区域其实是同一个区域，所以(1)式可以变为

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})}{y+x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

在(2)式的等式左右两侧同时加上 $\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，得

$$2\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{(x+y)\sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

(3)式可以化简为

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

现在来计算一下 $\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由于积分区域 $D$ 是圆环的一部分，所以用极坐标来计算，可得

$$\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\sin\pi r\mathrm{d}r = -\frac{3}{4} \tag{5}$$

(4)式、(5)式相结合，得

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{3}{4} \tag{6}$$

(18)（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$。若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

**解：**已知 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$，可是 $(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$ 并不是根据 $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 算出的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。所以我们可以通过 $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 来计算出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，结果与 $(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$ 肯定是相等的。这正是本题的解题思路。

所以首先要根据 $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

要想求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，必然要分别求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。于是就要先求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

由于 $z=f(e^x\cos y)$ 是一个抽象的函数并且 $f$ 后面括号里出现的并不是单一的字母，所以需要把它设成单一的字母，即设 $u=e^x\cos y$。这样，$z=f(e^x\cos y)$ 就变成了 $z=f(u)$。

所以有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)(-e^x\sin y)$$

接下来求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}=\frac{\partial[f'(u)e^x\cos y]}{\partial x}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x}=\frac{\partial[f'(u)(-e^x\sin y)]}{\partial x}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y$$

由此可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=[f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y]+[f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y]=f''(u)e^{2x}$$

所以有

$$f''(u)e^{2x}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$$

化简得

$$f''(u)=(4z+e^x\cos y)$$

因为 $z=f(e^x\cos y)$，所以有

$$f''(u)=[4f(e^x\cos y)+e^x\cos y]$$

前面已经设 $u=e^x\cos y$，所以有

$$f''(u)=4f(u)+u$$

移项得

$$f''(u)-4f(u)=u$$

为了方便表示，设 $t=f(u)$，则有

$t''-4t=u$。

$t''-4t=u$ 明显是一个二阶常系数非齐次线性微分方程，现在求其通解。

要想求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解，就要先求对应的二阶常系数齐次线性微分方程的通解。

所以现在就按照求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法来求 $t''-4t=0$ 的通解。

第一步：先把 $y''$ 的系数变为 1，即变为 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$，记 $p=\frac{B}{A}$，$q=\frac{C}{A}$。

对于 $t''-4t=0$，已经是 $t''+\frac{B}{A}t'+\frac{C}{A}t=0$ 的形式，所以不用再变了。其中 $p=0$，$q=-4$。

第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

$t''-4t=0$ 的特征方程是 $r^2-4=0$。

解得 $r_1=2$，$r_2=-2$。

第三步：写出通解。

情况 1：若第二步解出的 $r_1$、$r_2$ 为实根并且 $r_1\neq r_2$，则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$。

情况 2：若第二步解出的 $r_1$、$r_2$ 为实根并且 $r_1=r_2$，则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$。

情况 3：若第二步解出的 $r_1$、$r_2$ 为复数根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，则通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$。

由于 $r_1=2$，$r_2=-2$，所以属于情况 1，$t''-4t=0$ 的通解为 $t=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}$。

接下来求二阶常系数非齐次线性微分方程 $t''-4t=u$ 的一个特解 $t^*$。

求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解的方法如下：

设 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 是一个二阶常系数非齐次线性微分方程。在考研数学中 $f(x)$ 的形式或者是“$P_n(x)\times e^{\lambda x}$（其中 $P_n(x)$ 为 $n$ 次多项式）”，或者是“$(e^{\alpha x}[P_n(x)\sin\beta x+Q_m(x)\cos\beta x])\times e^{\lambda x}$（其中 $P_n(x)$ 为 $n$ 次多项式，$Q_m(x)$ 为 $m$ 次多项式）”。

情况 1：如果 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 中的 $f(x)$ 的形式是“$P_n(x)\times e^{\lambda x}$（其中 $P_n(x)$ 为 $n$ 次多项式）”，就设特解 $y^*=x^k\times H_n(x)\times e^{\lambda x}$（其中 $H_n(x)$ 为 $n$ 次多项式，即和 $P_n(x)$ 的次数一样）。只需要求出 $k$ 和 $H_n(x)$，特解 $Y^*$ 就求出来了。那么 $k$ 和 $H_n(x)$ 怎么求呢？$k$ 的求法是：如果 $\lambda$ 等于 $r_1$ 又等于 $r_2$，$k$ 取 2；如果 $\lambda$ 等于 $r_1$ 和 $r_2$ 中的一个，$k$ 取 1；如果 $\lambda$ 既不等于 $r_1$ 也不等于 $r_2$，$k$ 取 0。$n$ 次多项式 $H_n(x)$ 的求法是：直接代入微分方程里去求。

情况 2：如果 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 中的 $f(x)$ 的形式是“$[P_n(x)\sin\beta x+Q_m(x)\cos\beta x]\times e^{\lambda x}$（其中 $P_n(x)$ 为 $n$ 次多项式，$Q_m(x)$ 为 $m$ 次多项式）”，就设特解 $y^*=x^k\times[R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x]\times e^{\lambda x}$（其中 $R_l(x)$、$S_l(x)$ 为 $l$ 次多项式，$l$ 是 $m$ 和 $n$ 中较大的那个数。即多项式 $R_l(x)$、$S_l(x)$ 的次数与多项式 $P_n(x)$、$Q_m(x)$ 中次数高的那个一致）。所以只需要求出 $k$、$R_l(x)$、$S_l(x)$，特解 $Y^*$ 就求出来了。那么 $k$、$R_l(x)$、$S_l(x)$ 怎么求呢？$k$ 的求法是：如果 $\lambda\pm\beta i$ 是 $r_1$ 和 $r_2$，$k$ 取 1；如果 $\lambda\pm\beta i$ 不是 $r_1$ 和 $r_2$，$k$ 取 0。$l$ 次多项式 $R_l(x)$、$S_l(x)$ 的求法是：直接代入微分方程里去求。

$t''-4t=u$ 明显属于情况 1，所以按照情况 1 的方法来求特解，易求得 $t^*=-\frac{1}{4}u$。

所以非齐次微分方程 $t''-4t=u$ 的通解为 $t=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$。下面根据 $f(0)=0$，$f'(0)=0$ 确定 $C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$ 中的 $C_1$ 和 $C_2$。

由于$f(0)=0$，所以$C_1+C_2=0$。

由于$f'(0)=0$，所以$C_1-C_2=\frac{1}{8}$。

$C_1+C_2=0$与$C_1-C_2=\frac{1}{8}$联立，解得

$C_1=\frac{1}{16}$，$C_2=-\frac{1}{16}$

所以$f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$。

(19)(本题满分10分)

设函数$f(x)$，$g(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x)$单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$。证明：

(Ⅰ)$0\leqslant\int_a^x g(t)\,dt\leqslant x-a$，$x\in[a,b]$；

(Ⅱ)$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,dx$。

**解**：先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问要证明的是$0\leqslant\int_a^x g(t)\,dt\leqslant x-a$，由于$0=\int_a^x 0\,dt$，$x-a=\int_a^x 1\,dt$，所以第(Ⅰ)问相当于证明的是$\int_a^x 0\,dt\leqslant\int_a^x g(t)\,dt\leqslant\int_a^x 1\,dt$。

由于$\int_a^x 0\,dt$、$\int_a^x g(t)\,dt$、$\int_a^x 1\,dt$这三者的积分区域一样，所以只需比较被积函数的大小，被积函数的大小就是积分值的大小。

已知$0\leqslant g(x)\leqslant 1$，所以有$0\leqslant g(t)\leqslant 1$，$\int_a^x 0\,dt\leqslant\int_a^x g(t)\,dt\leqslant\int_a^x 1\,dt$，$0\leqslant\int_a^x g(t)\,dt\leqslant x-a$。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问要证明的是$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,dx$，设辅助函数$F(u)=\int_a^u f(x)g(x)\,dx-\int_a^{a+\int_a^u g(t)dt} f(x)\,dx$。最后只要证明$F(b)\geqslant 0$即可(因为$F(b)\geqslant 0$就意味着$\int_a^b f(x)g(x)\,dx-\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)\,dx\geqslant 0$，进而有$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,dx$)。

下面开始证明。

由于$F(u)=\int_a^u f(x)g(x)\,dx-\int_a^{a+\int_a^u g(t)dt} f(x)\,dx$，所以有$F'(u)=f(u)g(u)-$

$f(a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t)g(u)$，将 $F'(u)$ 化简可得 $F'(u)=g(u)[f(u)-f(a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t)]$。

由第(I)问的结论可知 $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a$，同时加上一个 $a$ 得 $a\leqslant a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x$，把 $x$ 换成 $u$ 得 $a\leqslant a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t\leqslant u$。

由于 $a\leqslant a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t\leqslant u$，已知 $f(x)$ 单调增加，所以有 $f(u)-f(a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t)>0$，又因为 $g(u)\geqslant 0$，所以有 $F'(u)=g(u)[f(u)-f(a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t)]\geqslant 0$，这说明函数 $F(u)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调不减。

前面设的辅助函数是 $F(u)=\int_a^u f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^{a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x$，所以 $F(a)=0$。

综上所述，由于函数 $F(u)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调不减且 $F(a)=0$，所以 $F(b)\geqslant 0$。

（20）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，$x\in[0,1]$。定义函数列：

$f_1(x)=f(x)$，$f_2(x)=f(f_1(x))$，…，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，…

记 $S_n$ 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 $x$ 轴所围平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$。

**解**：本题分为三个步骤解答。步骤一是求出函数 $f_n(x)$，步骤二是求出 $S_n$，步骤三是求出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$。

先来进行步骤一，即求出函数 $f_n(x)$。

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{1+x},\ x\in[0,1]$$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x},\quad x\in[0,1]$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}}=\frac{x}{1+3x},\ x\in[0,1]$$

……

由数学归纳法可知 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$，$x\in[0,1]$。

再来进行步骤二，即求出 $S_n$。

$S_n$ 是由曲线 $y = f_n(x)$,直线 $x = 1$ 及 $x$ 轴所围平面图形的面积。

在步骤一中已经计算出了 $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}\ x \in [0, 1]$,所以现在需要计算的是由曲线 $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}\ x \in [0, 1]$,直线 $x = 1$ 及 $x$ 轴所围平面图形的面积。

计算面积应该用定积分,而如果要用定积分来计算某封闭图形的面积,那么该封闭图形肯定是由 $x = a$、$x = b$、$y = f(x)$、$y = g(x)$ 这四条线所围成的。

有些同学认为"由曲线 $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}\ x \in [0, 1]$,直线 $x = 1$ 及 $x$ 轴所围平面图形"是三条线所围成的,难道要把它写成四条线围成吗?这里要告诉大家,即使一个封闭图形由两条线就能围成,只要用定积分计算面积,就必须把它写为由 $x = a$、$x = b$、$y = f(x)$、$y = g(x)$ 这四条线围成的。

本题中,要计算面积的区域是由 $x = 1$、$x = 0$、$y = \dfrac{x}{1+nx}$、$y = 0$ 所围成的(为什么第四条线是 $x = 0$ 呢?这是因为 $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}\ x \in [0, 1]$ 中的 $x$ 最小取 0,当 $x$ 取 0 时,$f_n(x)$ 也为 0,也就是说 $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ 是过原点的,所以第四条线是 $x = 0$)。

要计算面积的区域面积 $S_n = \int_0^1 (\dfrac{x}{1+nx} - 0)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln(1+n)}{n^2}$。

最后进行步骤三,即求出极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$。

由于 $S_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln(1+n)}{n^2}$,$nS_n = 1 - \dfrac{\ln(1+n)}{n}$,所以

$\lim\limits_{n\to\infty} nS_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \dfrac{\ln(1+n)}{n}) = 1$

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$,且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$,求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围成图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积。

**解:** 由于 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$,所以可以求出

$$f(x, y) = \int 2(y+1)\mathrm{d}y = (y+1)^2 + g(x) \tag{1}$$

有些同学可能会奇怪为什么不定积分的最后加的不是常数 $C$ 而是 $g(x)$,这是因为是对 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 积分而不是对 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}$ 积分(可以简单理解为"加 $g(x)$ 就相当于是加常数 $C$,因为对 $y$ 求偏导

的时候 $x$ 就当成常数”)。

由(1)式可得

$$f(y,y)=(y+1)^2+g(y) \tag{2}$$

已知

$$f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y \tag{3}$$

(2)式、(3)式相结合，得

$$g(y)=-(2-y)\ln y \tag{4}$$

由(4)式可知

$$g(x)=-(2-x)\ln x \tag{5}$$

把(5)式代入(1)式，得

$$f(x,y)=(y+1)^2-(2-x)\ln x \tag{6}$$

所以，曲线 $f(x,y)=0$ 就意味着 $(y+1)^2-(2-x)\ln x=0$，化简得

$$y=\sqrt{(2-x)\ln x}-1 \quad (1\leqslant x\leqslant 2)$$

要求曲线 $y=\sqrt{(2-x)\ln x}-1(1\leqslant x\leqslant 2)$ 所围成图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积，根据旋转体体积公式可知

$$V=\int_1^2\pi\,[y-(-1)]^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\pi\,(y+1)^2\mathrm{d}x \xlongequal[\text{了}(y+1)^2=(2-x)\ln x]{\text{我们刚才已经推出}} \int_1^2\pi(2-x)\ln x\mathrm{d}x=\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right)\pi$$

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵。

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的一个基础解系。

(Ⅱ)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 $B$。

**解**：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

首先，由于方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的等式右侧是 $\vec{0}$，这就说明方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 是一个齐次方程组，所以只需按照求齐次方程组通解的方法来求解即可。

求齐次方程组通解分为以下三个步骤：

(1)写出所给方程组对应的矩阵并求出矩阵的秩。

(2)判断解的类型。

① 若 $r=n$，则该齐次方程组有唯一零解。

② 若 $r<n$，则该齐次方程组有非唯一解(也就是非零解、无穷多解)，需要进行步骤(3)。

注意：其中 $n$ 为方程组中所含的未知数的个数，$r$ 为步骤(1)所求出的矩阵的秩。

(3)计算 $n-r$，设 $n-r=A$，则说明 $n$ 个未知数中有 $A$ 个可以自由取值，并且取 $A$ 组(注意：取的这 $A$ 组向量必须线性无关，如不能含零向量、不能含相等的向量、不能含成比例的向量)，则齐次方程组的通解为 $A$ 组向量的任意线性组合。

下面就按照上述三个步骤来解答。

(1)写出所给方程组对应的矩阵并且求出矩阵的秩。

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\0 & 1 & -1 & 1\\1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$

求秩的具体过程这里就不详述了。此题化阶梯形需要四步。因为 $2(3-1)=4$。

经过化阶梯形的四个步骤后，系数矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\0 & 1 & -1 & 1\\1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$ 变为了 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\0 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$，所以秩为3，即 $r=3$。

(2)判断解的类型。

未知数个数 $n=4$(因为矩阵有四列，列数等于未知数个数)，秩 $r=3$。由于 $r<n$，所以此方程组有无穷多解，并且进行第三步。

(3)求解。

$n-r=4-3=1$，说明四个未知数中有一个未知数可以自由取值并且取一组，那么四个未知数中哪个未知数可以自由取值呢?

这时就需要借助阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\0 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

将此矩阵还原为方程组，得：

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0\\x_2-x_3+x_4=0\\x_3-3x_4=0\end{cases}$$

现在就通过此方程组来观察 $x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$ 这四个未知数中哪一个未知数可以自由取值。

可以是 $x_4$ 吗？我们来验证一下。方法是假设 $x_4$ 已知，看能不能解出 $x_1$、$x_2$、$x_3$。$x_4$ 一旦确定代入 $x_3-3x_4=0$，就可以确定 $x_3$。再把 $x_3$、$x_4$ 代入 $x_2-x_3+x_4=0$ 中，就可以确定 $x_2$。把 $x_2$、$x_3$、$x_4$ 代入 $x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0$ 中，就可以确定 $x_1$。所以自由取值的那个未知数可以是 $x_4$。

同理，根据 $x_3$ 可以解出其他未知数 $x_1$、$x_2$、$x_4$，所以自由取值的那个未知数可以是 $x_3$。

根据 $x_2$ 可以解出其他未知数 $x_1$、$x_3$、$x_4$，所以自由取值的那个未知数可以是 $x_2$。

根据 $x_1$ 可以解出其他未知数 $x_2$、$x_3$、$x_4$，所以自由取值的那个未知数可以是 $x_1$。

综上所述，可以自由取值的那个未知数可以是 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 或 $x_4$。那究竟取选哪一个呢？随便，取哪个都行。不妨就选 $x_4$。

根据步骤(3)，$A=n-r=1$，说明需要只取一组 $x_4$ 即可。不妨取 $x_4=1$，那么根据方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \\ x_3-3x_4=0 \end{cases}$$

可以解得 $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \end{cases}$

所以方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的一个基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，第(Ⅰ)问解答完了。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$，由于 $\boldsymbol{A}$ 是3行4列的矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是3行3列的矩阵，所以 $\boldsymbol{B}$ 必然是4行3列的矩阵。设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$。

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 可以转化为以下三个非齐次方程组：

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \\ j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \\ l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

那么只需通过第一个方程组解出 $a$、$d$、$j$、$g$，通过第二个方程组解出 $b$、$e$、$h$、$k$，通过第三个方程组解出 $c$、$f$、$i$、$l$ 即可。

具体解的过程这里不再赘述，最后的答案如下：

$$B=\begin{pmatrix} 2-c_1 & 6-c_2 & -1-c_3 \\ -1+2c_1 & 3+2c_2 & 1+2c_3 \\ -1+3c_1 & -4+3c_2 & 1+3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

其中 $c_1$、$c_2$、$c_3$ 为任意常数。

(23)(本题满分 11 分)

证明 $n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似。

**解**：先告诉大家两个性质。

① 相似具有对称性。即：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$。

② 相似具有传递性。即：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$。

记矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$，记矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$，本题只需证明"矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似于对角矩阵，并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值一样"就可以了。为什么呢？就是根据前面提到的两个性质。下面具体解释一下。

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似于对角矩阵，就可以设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}_1$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}_2$。由于相似具有对称性，所以由 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}_2$ 可得 $\boldsymbol{\Lambda}_2\sim\boldsymbol{B}$。

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值一样，就有 $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_2 = \boldsymbol{\Lambda}$。也就是说：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{\Lambda} \sim \boldsymbol{B}$。由于相似具有传递性，所以由 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{\Lambda} \sim \boldsymbol{B}$ 可得 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。

现在应该明白为什么只需证明“矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似于对角矩阵，并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值一样”即可了。

先来证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似于对角矩阵，证明方法如下。

由于矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 是实对称矩阵，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似于对角矩阵。

由于矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 是上三角矩阵，其特征值必为对角线上的数，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为：$n-1$ 个 0，1 个 $n$。

再通过计算可知特征值 0 对应的线性无关的特征向量一共有 $n-1$ 个，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可以相似于对角矩阵。

再来证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值一样，证明方法如下。

先将矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 化为阶梯型矩阵。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

很明显，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = 1$，而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又是实对称矩阵，对于实对称矩阵，有且仅有 $n-r$ 个特征值为 0。所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $n-1$ 个特征值为 0。由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵，所以肯定有 $n$ 个特征值。那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 剩下的那个特征值是多少呢？显然是 $n$。这是因为：任何一个方阵的所有特征值之和等于对角线元素之和，由这个性质可以解出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 剩下的那个特征值是 $n$。

综上所述，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为：$n-1$ 个 0，1 个 $n$。

由于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 是上三角矩阵，其特征值必为对角线上的数，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为：$n-1$ 个 0，1 个 $n$。

由此可知，$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。

# 2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题及精解

## 一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1)设 $\cos x - 1 = x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$，则当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是(　　)。

(A)比 $x$ 高阶的无穷小

(B)比 $x$ 低阶的无穷小

(C)与 $x$ 同阶但不等价的无穷小

(D)与 $x$ 等价的无穷小

**解**：本题的四个选项虽然各不一样，但它们有一个共同点，那就是：当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是无穷小（$\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = 0$）。

现在来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}$。如果计算结果是 0，就说明 $\alpha(x)$ 是比 $x$ 高阶的无穷小，本题应该选择(A)选项；如果计算结果是 $\infty$，就说明 $\alpha(x)$ 是比 $x$ 低阶的无穷小，应该选择(B)选项；如果计算结果是不为 0 也不为 1 的常数 $C$，就说明 $\alpha(x)$ 是与 $x$ 同阶但不等价的无穷小，应该选择(C)选项；如果计算结果是 1，就说明 $\alpha(x)$ 是与 $x$ 等价的无穷小，应该选择(D)选项。

根据等价无穷小替换原则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x} \tag{1}$$

很明显，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}$ 可以写为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\alpha(x)}{x^2} \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\alpha(x)}{x^2} \tag{3}$$

已知

$$\cos x - 1 = x\sin\alpha(x) \tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} \tag{5}$$

根据等价无穷小替换原则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \tag{6}$$

这说明 $\alpha(x)$ 是与 $x$ 同阶但不等价的无穷小，所以本题应该选择(C)选项。

(2)设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n}) - 1] =$ (　　)。

(A) 2　　　(B) 1

(C) $-1$　　　(D) $-2$

**解**：本题要计算的是"数列的极限"。

大家遇到计算数列的极限的题的时候，可以用以下四种方法之一来求解：单调有界法、夹逼定理法、积分和式法、将数列极限转化为函数极限。

"单调有界法"用于计算已知数列的递推公式的数列极限计算题。

"夹逼定理法"用于计算含 $\sum$ 的数列极限计算题。

"积分和式法"用于计算含 $\sum$ 或 $\prod$ 的数列极限计算题。

如果某道数列的极限计算题上述三种方法使用条件都不满足，那就用"将数列极限转化为函数极限"的方法来计算。

本题中既没有给数列的递推公式，$n[f(\frac{2}{n}) - 1]$ 中也不含 $\sum$ 或 $\prod$，所以应该采用"将数列极限转化为函数极限"的方法来计算本题。具体计算方法如下。

$$\lim_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n}) - 1] = \lim_{x\to+\infty} x[f(\frac{2}{x}) - 1] \tag{1}$$

这里把 $n$ 换成了 $x$。有些同学可能会问：为什么 $n$ 趋于 $\infty$，将 $n$ 变为 $x$ 之后变成了 $x$ 趋于 $+\infty$ 呢？我来解释一下：$n\to\infty$ 指的其实就是 $n\to+\infty$(因为 $n$ 不可能趋于 $-\infty$)，所以 $n\to+\infty$ 可以省略地写为 $n\to\infty$。但是 $x$ 就不同了，$x$ 既可以趋于 $+\infty$ 又可以趋于 $-\infty$，所以将数列极限转化为函数极限之后，"+"就不能省略了。

继续答题。$\lim\limits_{x\to+\infty} x[f(\frac{2}{x}) - 1]$ 可以变为

$$\lim_{x\to+\infty} x[f(\frac{2}{x})-1]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{2}{x})-1}{\frac{1}{x}} \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n})-1]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{2}{x})-1}{\frac{1}{x}} \tag{3}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\frac{2}{x})-1}{\frac{1}{x}}$很明显可以写为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{2}{x})-1}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{2}{x})-1}{\frac{2}{x}} \tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n})-1]=2\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{2}{x})-1}{\frac{2}{x}} \tag{5}$$

设 $t=\frac{2}{x}$，则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{2}{x})-1}{\frac{2}{x}}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-1}{t} \tag{6}$$

(5)式、(6)式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n})-1]=2\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-1}{t} \tag{7}$$

由 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 可知“当 $x=0$ 时，$y=1$”，也就是$f(0)=1$。将$f(0)=1$代入(7)式，得

$$\lim_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n})-1]=2\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t} \tag{8}$$

$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$可以写为

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(0+t)-f(0+0)}{t-0} \tag{9}$$

(8)式、(9)式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=2\lim_{t\to0^+}\frac{f(0+t)-f(0+0)}{t-0} \tag{10}$$

下面告诉一个定理：

若已知函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\square=0$、$\lim\limits_{x\to0}\Delta=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+\square)-f(a+\Delta)}{\square-\Delta}=f'(a)$。

根据以上的定理就可以知道：本题中，若 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，那么 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(0+t)-f(0+0)}{t-0}$ 就等于 $f'(0)$。那么右导数 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(0+t)-f(0+0)}{t-0}$ 也等于 $f'(0)$。

综上所述，本题中，若 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，就有 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(0+t)-f(0+0)}{t-0}=f'(0)$。

由 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 可知，函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处必然可导，所以现在只需求出 $f'(0)$ 即可。

由于 $\cos(xy)+\ln y-x=1$，该方程两边同时对 $x$ 求导得

$-\sin(xy)\times\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)+\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}-1=0$。

将 $x=0$ 代入上式中，有

$$-\sin0\times\left(1+0\times\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}\right)+\frac{1}{1}\times\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}-1=0$$

解得

$$f'(0)=1 \tag{11}$$

而前面已推出

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(0+t)-f(0+0)}{t-0}=f'(0) \tag{12}$$

(11)式、(12)式相结合，得

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(0+t)-f(0+0)}{t-0}=1 \tag{13}$$

(10)式、(13)式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=2\times1=2 \tag{14}$$

所以本题应该选择(A)选项。

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi\\ 2, & \pi\leqslant x\leqslant2\pi\end{cases}$，$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$，则(　　)。

(A) $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的跳跃间断点　　(B) $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的可去间断点

(C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导　　(D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

**解**：先告诉一个定理。

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除了点 $x = x_0$ 之外均连续（当然，点 $x = x_0$ 肯定属于区间 $[a, b]$），在点 $x = x_0$ 处有跳跃间断点，且 $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$（$c$ 可以等于 $x_0$ 也可以不等于 $x_0$），则有如下结论成立：

① $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。

② 当 $x \in [a, b]$ 但 $x \neq x_0$ 时，$F'(x) = f(x)$。

③ $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处不可导。

下面来看本题。

由于 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x < \pi \\ 2, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$，显然函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上除了点 $x = \pi$ 之外连续，而且在 $x = \pi$ 处有跳跃间断点（因为左右极限都存在但是不相等）。又有 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，根据上述定理可知：

$F(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上连续。

当 $x \in [0, 2\pi]$ 但 $x \neq \pi$ 时，$F'(x) = f(x)$。

$F(x)$ 在 $x = \pi$ 处不可导。

所以本题应该选择(C)选项。

（4）设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < \mathrm{e} \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x \geqslant \mathrm{e} \end{cases}$。若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）。

(A) $\alpha < -2$　　　　(B) $\alpha > 2$

(C) $-2 < \alpha < 0$　　　　(D) $0 < \alpha < 2$

**解**：很明显，$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 可以写为

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

而 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < \mathrm{e} \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x \geqslant \mathrm{e} \end{cases}$，所以(1)式可以化为

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x \tag{2}$$

由于反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，所以有 $\int_1^{e} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x$ 收敛。

由 $\int_1^{e} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$ 收敛可以得出 $\alpha-1<1$，即 $\alpha<2$。

由于 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x$ 可以写为 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}(\ln x)$，所以 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x$ 收敛就说明 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}(\ln x)$ 收敛，所以有 $\alpha+1>1$，即 $\alpha>0$。

由于 $\alpha<2$ 且 $\alpha>0$，所以 $0<\alpha<2$，本题应该选择(D)选项。

(5)设 $z=\frac{y}{x}f(xy)$，其中函数 $f$ 可微，则 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=($　　$)$。

(A) $2yf'(xy)$　　(B) $-2yf'(xy)$

(C) $\frac{2}{x}f(xy)$　　(D) $-\frac{2}{x}f(xy)$

**解：**本题的解题思路很简单，就是分别计算出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$，然后代入 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ 中。

先来计算一下 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}\text{ 对 }x\text{ 求偏导 }\times f(xy)+f(xy)\text{ 对 }x\text{ 求偏导 }\times\frac{y}{x}$$
$$=-\frac{y}{x^2}f(xy)+y\times f'(xy)\times\frac{y}{x}$$

再来计算一下 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}\text{ 对 }y\text{ 求偏导 }\times f(xy)+f(xy)\text{ 对 }y\text{ 求偏导 }\times\frac{y}{x}$$
$$=\frac{1}{x}f(xy)+x\times f'(xy)\times\frac{y}{x}$$

把 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)$ 代入 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ 中，得

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}\left[-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)\right]+\left(\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)\right)$$
$$=2yf'(xy)$$

所以本题应该选择(A)选项。

(6) 设 $D_k$ 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$ 位于第 $k$ 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(k=1,2,3,4)$，则(　　)。

(A) $I_1>0$　　(B) $I_2>0$

(C) $I_3>0$　　(D) $I_4>0$

**解**：由于 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(k=1,2,3,4)$，所以有

$$I_1=\iint\limits_{D_1}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_2=\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_3=\iint\limits_{D_3}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_4=\iint\limits_{D_4}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

本题是问这四个二重积分中的哪个大于 0。

这其实非常简单。大家记住：如果一个二重积分的被积函数在积分区域中的每一点都是大于 0 的，那么该二重积分就一定大于 0。

来看一下(B)选项。

(B)选项的二重积分的被积函数是 $y-x$，积分区域是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$ 在第二象限中的部分，也就是一个“四分之一圆”。在这个“四分之一圆”的每一点上，是否都有 $y-x>0$？很明显是，因为第二象限的这“四分之一圆”中的每一点都是 $x<0$ 且 $y>0$，所以必然有 $y-x>0$。

综上所述，由于(B)选项中所给的二重积分 $I_2=\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的被积函数在其积分区域 $D_2$ 中的每一点都是大于 0 的，所以二重积分 $I_2=\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$，本题应该选择(B)选项。

(7) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为 $n$ 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则(　　)。

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

**解**：由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵，所以设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$。将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以列分块，即 $\boldsymbol{A}=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_n})$。同样，把矩阵 $\boldsymbol{C}$ 也以列分块，即 $\boldsymbol{C}=(\overrightarrow{\gamma_1},\overrightarrow{\gamma_2},\cdots,\overrightarrow{\gamma_n})$。

由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，又因为 $\boldsymbol{A}=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_n})$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=(\overrightarrow{\gamma_1},\overrightarrow{\gamma_2},\cdots,\overrightarrow{\gamma_n})$，所以有

$$(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_n})\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=(\overrightarrow{\gamma_1},\overrightarrow{\gamma_2},\cdots,\overrightarrow{\gamma_n})$$

以上等式可以展开为

$$\begin{cases} \overrightarrow{\gamma_1}=b_{11}\overrightarrow{\alpha_1}+b_{21}\overrightarrow{\alpha_2}+\cdots+b_{n1}\overrightarrow{\alpha_n} \\ \overrightarrow{\gamma_2}=b_{12}\overrightarrow{\alpha_1}+b_{22}\overrightarrow{\alpha_2}+\cdots+b_{n2}\overrightarrow{\alpha_n} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\gamma_n}=b_{1n}\overrightarrow{\alpha_1}+b_{2n}\overrightarrow{\alpha_2}+\cdots+b_{nn}\overrightarrow{\alpha_n} \end{cases}$$

所以说矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可以由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表出。

继续来看，已知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，这说明矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在。现在将 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 的等式左右两侧同时右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，得

$\boldsymbol{ABB}^{-1}=\boldsymbol{CB}^{-1}$

化简得

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$

即

$\mathbf{CB}^{-1}=\mathbf{A}$

前面由已知条件“$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$”推出了“矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可以由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表出”，同理也就能由“$\boldsymbol{CB}^{-1}=\boldsymbol{A}$”推出“矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可以由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表出”。

由此可得：矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价。

所以本题应该选择(B)选项。

（8）矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为(　　)。

(A) $a=0, b=2$

(B)) $a=0$, $b$ 为任意常数

(C) $a=2, b=0$

(D) $a=2$, $b$ 为任意常数

**解**：由于$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$，所以矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$是实对称矩阵。由于$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以矩阵$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$也是实对称矩阵。

我们知道，两个实对称矩阵相似的充分必要条件是：这两个矩阵具有相同的特征值。

先来看一下矩阵$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$的特征值。

由于矩阵$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$是对角矩阵，所以该矩阵对角线上的数字就是它的特征值，即矩阵$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$的三个特征值是 2、$b$、0。

于是本题中求“矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件”现在就被转化为求“2、$b$、0 是矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$的特征值的充分必要条件”。

通过计算可知，矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$所对应的行列式$\begin{vmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{vmatrix}$的值为 0。这说明 0 是矩

阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值(无论$a$、$b$取什么值)。

我们知道,一个矩阵的对角线上的数字之和等于所有特征值之和,而矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的对角线上的数字是1、$b$、1,所以矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的三个特征值之和为$1+b+1=2+b$。

前面已经证明了0必是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值,加之矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的所有特征值(三个特征值)之和为$2+b$,所以可以知道:若2是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值,则$b$必是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值。也就是说:若2是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值,那么矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的三个特征值就是2、$b$、0。

于是本题的中求"矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件"现在又进一步被转化为求"2是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值的充分必要条件"。

由于2是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值,所以有

$$\left|2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}\right|=0$$

化简得

$-4a^2=0$

解得 $a=0$。

所以矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是 $a=0$，$b$ 为任意常数，本题应该选择(B)选项。

## 二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ________。

**解**：先来计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]$。

$\lim\limits_{x\to0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]=1$

再来计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$。

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$

所以本题属于 $1^{\infty}$ 型的函数极限计算题，可以按照此类极限计算题的解题方法来解答。

$\lim\limits_{x\to0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}$

只需算出 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]$ 即可。

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}{x}\tag{1}$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}{x}$ 可以写为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right]}{x}\tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right]}{x}\tag{3}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)=0$，根据等价无穷小可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}\tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}\tag{5}$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}$可以整理为

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\tag{6}$$

(5)式、(6)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\tag{7}$$

由于$\lim\limits_{x\to0}[x-\ln(1+x)]=0$，$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$属于$\frac{0}{0}$型的函数极限计算题，可以对其使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(x-\ln(1+x))'}{(x^2)'}\tag{8}$$

(7)式、(8)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(x-\ln(1+x))'}{(x^2)'}\tag{9}$$

而

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-\ln(1+x))'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\tag{10}$$

(9)式、(10)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\tag{11}$$

而$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$可以化为

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}\tag{12}$$

(11)式、(12)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)} \tag{13}$$

由代入法可知

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2} \tag{14}$$

(13)式、(14)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\frac{1}{2} \tag{15}$$

所以 $e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}=e^{\frac{1}{2}}$，本题应填 $e^{\frac{1}{2}}$。

(10)设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\frac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=$ ________。

**解：** 由于 $y=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，所以 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-e^x}$，$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$。

本题要求的是 $\frac{dx}{dy}\Big|_{y=0}$，等价于求 $\frac{dx}{dy}\Big|_{x=-1}$（这里有很多同学不明白，其实很简单，因为 $y=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，所以只有当 $x=-1$ 时才有 $y=0$）。

所以有

$$\frac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=\frac{dx}{dy}\Big|_{x=-1}=\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\Big|_{x=-1}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$$

所以本题应填 $\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$。

(11)设封闭曲线 $L$ 的极坐标方程为 $r=\cos3\theta\left(-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$，则 $L$ 所围平面图形的面积为________。

**解：** 这道题非常简单，只需使用“极坐标的面积公式 $S=\int_a^b\frac{1}{2}r^2d\theta$”即可。即 $L$ 所围平面图形的面积为

$$S=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cos^2 3\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=2\times\frac{1}{2}\times\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(1+\cos6\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{12}$$

所以本题应填 $\frac{\pi}{12}$。

(12)曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的法线方程为________。

**解**:本题要求的是"曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的法线方程"。如果求的是"曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的切线方程",相信大家都知道是 $y - y|_{t=1} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}(x - x|_{t=1})$。

其实法线方程和切线方程差不多,唯一的区别就是:不是 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}$,而是 $-\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}}$。

换言之,法线方程是 $y - y|_{t=1} = -\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}}(x - x|_{t=1})$。

下面来看本题。

由于 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$,所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \times \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = t$,$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1} = 1$。

由于 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$,所以有 $x|_{t=1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$,$y|_{t=1} = \ln\sqrt{2}$。

所以法线方程为 $y - \ln\sqrt{2} = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,整理得 $y + x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$。

所以本题应填 $y + x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$。

(13)已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$,$y_2 = e^x - xe^{2x}$,$y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数线性微分方程的3个解,则该方程满足条件 $y(0) = 0$,$y'(0) = 1$ 的解为 $y =$________。

**解**:本题的解题思路非常明显,第一步求通解,第二步求特解。

先来求通解。

二阶常系数非齐次线性微分方程的通解形式一定是 $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + y^*$。其中 $\lambda_1$、$\lambda_2$、$y^*$ 是需要我们求的。

已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$,$y_2 = e^x - xe^{2x}$,$y_3 = -xe^{2x}$,这三个式子结合来看,可得 $\lambda_1 = 3$,$\lambda_2 = 1$,$y^* = -xe^{2x}$。

也就是说该二阶常系数非齐次线性微分方程的通解为 $y = C_1e^{3x} + C_2e^x - xe^{2x}$，其中 $C_1$、$C_2$ 为任意常数(之所以 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$ 是解，是因为 $y = C_1e^{3x} + C_2e^x - xe^{2x}$ 中 $C_1$ 取的是 1，$C_2$ 取的是 0；之所以 $y_2 = e^x - xe^{2x}$ 是解，是因为 $y = C_1e^{3x} + C_2e^x - xe^{2x}$ 中 $C_1$ 取的是 0，$C_2$ 取的是 1；之所以 $y_3 = -xe^{2x}$ 是解，是因为 $y = C_1e^{3x} + C_2e^x - xe^{2x}$ 中 $C_1$ 取的是 0，$C_2$ 取的也是 0)。

再来求特解。

由于 $y = C_1e^{3x} + C_2e^x - xe^{2x}$，而 $y(0) = 0$，所以有

$$C_1 + C_2 = 0 \tag{1}$$

由于 $y = C_1e^{3x} + C_2e^x - xe^{2x}$，所以 $y' = 3C_1e^{3x} + C_2e^x - e^{2x} - 2xe^{2x}$，而 $y'(0) = 1$，所以有

$$3C_1 + C_2 - 1 = 1 \tag{2}$$

(1)式和(2)式联立组成如下方程组

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 3C_1 + C_2 - 1 = 1 \end{cases}$$

解得 $C_1 = 1$，$C_2 = -1$。

所以特解为 $y = e^{3x} - e^x - xe^{2x}$，本题应填 $e^{3x} - e^x - xe^{2x}$。

(14)设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，$A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式。若 $a_{ij} + A_{ij} = 0(i, j = 1, 2, 3)$，则 $|\boldsymbol{A}| =$ ________。

**解：** 已知 $a_{ij} + A_{ij} = 0$，移项得 $a_{ij} = -A_{ij}$，这意味着什么呢？先具体写出矩阵 $A$ 和矩阵 $A^*$。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}，伴随矩阵 \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}。$$

可以看出，$a_{ij}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素，$A_{ij}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 中的元素，所以由 $a_{ij} = -A_{ij}$ 可以得出

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}^* \tag{1}$$

将(1)式的等式左右两侧取行列式，得

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |-\boldsymbol{A}^*| \tag{2}$$

我们知道

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}| \tag{3}$$

(2)式、(3)式相结合，得

$$|\boldsymbol{A}| = |-\boldsymbol{A}^*| \tag{4}$$

现在给大家复习一个公式，即：$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$，其中 $n$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数(或列数)。根据此公式有

$$|-\boldsymbol{A}^*|=(-1)^3|\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}^*| \tag{5}$$

(4)式、(5)式相结合，得

$$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}^*| \tag{6}$$

再给大家复习一个公式，即：$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，其中 $n$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数(或列数)。根据此公式，(6)式可以变为

$$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|^2 \tag{7}$$

设 $|A|=x$，所以(7)式就变为了

$$x=-x^2 \tag{8}$$

解得 $x=0$ 或 $x=-1$，也就是说 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$。可是行列式的值是唯一的，需要舍去一个，那么到底舍去谁呢?

我们知道

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \tag{9}$$

由(1)式可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^*$，所以有

$$r(\boldsymbol{A})=r(-\boldsymbol{A}^*) \tag{10}$$

我们知道

$$r(-\boldsymbol{A}^*)=r(\boldsymbol{A}^*) \tag{11}$$

(10)式、(11)式相结合，得

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^*) \tag{12}$$

下面告诉大家一个定理：

对于 $n$ 阶方阵，有

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}0, & r(\boldsymbol{A})<n-1\\1, & r(\boldsymbol{A})=n-1\\n, & r(\boldsymbol{A})=n\end{cases}$$

本题中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，而且前面已经推出了 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^*)$，由上述定理可知：

$r(\boldsymbol{A})=0$ 或 $r(\boldsymbol{A})=3$。

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵，于是 $r(\boldsymbol{A})\neq 0$，所以 $r(\boldsymbol{A})=3$，即方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩。由此推出该方阵的行列式不等于0，即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$。

又因为 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$，所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$。

本题应填 $-1$。

## 三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 $ax^n$ 为等价无穷小，求 $n$ 与 $a$ 的值。

**解**：先来计算一下 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$ 属于“$\dfrac{0}{0}$ 型”的函数极限计算题，可以对其使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x)'}{(x^2)'}\tag{1}$$

通过计算可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 2x\cos 3x+2\sin 2x\cos 3x\cos x+3\sin 3x\cos 2x\cos x}{2x}\tag{2}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 2x\cos 3x+2\sin 2x\cos 3x\cos x+3\sin 3x\cos 2x\cos x}{2x}\tag{3}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos 2x\cos 3x+2\sin 2x\cos 3x\cos x+3\sin 3x\cos 2x\cos x}{2x}$ 很明显可以写为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos 2x\cos 3x}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\cos 3x\cos x}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x\cos 2x\cos x}{2x}$，通过计算可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos 2x\cos 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos 2x\cos 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x\cos 3x}{2}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\cos 3x\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cos 3x\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}2\cos 3x\cos x=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x\cos 2x\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x\cos 2x\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\cos 2x\cos x}{2}=\dfrac{9}{2}$

所以（3）式可以写为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}=\frac{1}{2}+2+\frac{9}{2}=7\tag{4}$$

将（4）式的等式左右两侧同时乘以 $\dfrac{1}{7}$，得

$$\frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}=1 \tag{5}$$

而

$$\frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{7x^2} \tag{6}$$

(5)式、(6)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{7x^2}=1 \tag{7}$$

已知当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 $ax^n$ 为等价无穷小，这说明

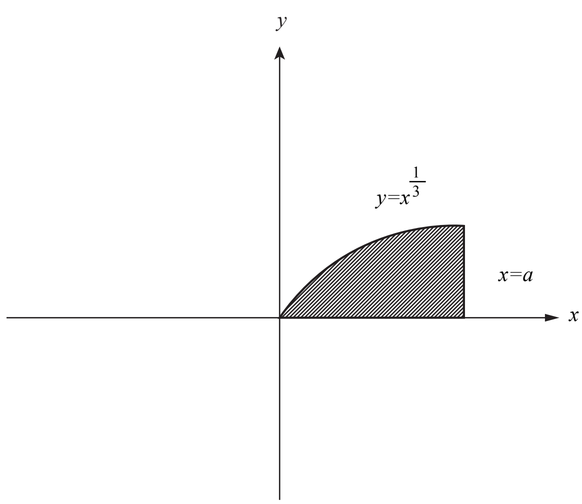
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=1 \tag{8}$$

对比(7)式和(8)式，可知 $a=7$，$n=2$。

(16)(本题满分 10 分)

设 $D$ 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a\ (a>0)$ 及 $x$ 轴所围成的平面图形。$V_x$、$V_y$ 分别是 $D$ 绕 $x$ 轴、$y$ 轴旋转一周所得旋转体的体积。若 $V_y=10V_x$，求 $a$ 的值。

**解：** 首先在平面直角坐标系中画出"由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a\ (a>0)$ 及 $x$ 轴所围成的平面图形"，如下图所示。




$V_x$、$V_y$ 分别是 $D$ 绕 $x$ 轴、$y$ 轴旋转一周所得旋转体的体积，由绕 $x$ 轴、$y$ 轴的旋转体体积公式可得

$$V_x=\int_0^a\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y = \int_0^a 2\pi x \cdot x^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x = \frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}$$

由于 $V_y = 10V_x$，所以有

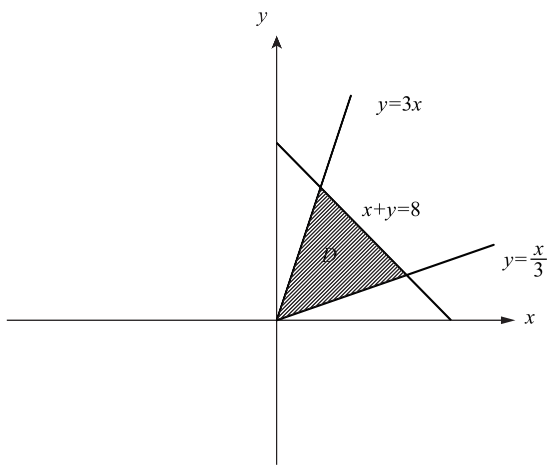
$$\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}} = 10 \times \frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

解得 $a = 7\sqrt{7}$。

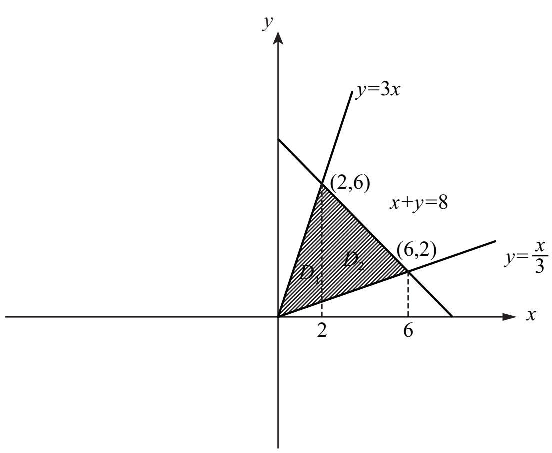
（17）（本题满分 10 分）

设平面区域 $D$ 由直线 $x = 3y$，$y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成，计算 $\iint\limits_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

**解**：首先在平面直角坐标系中画出由直线 $x = 3y$，$y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成的平面区域 $D$，如下图所示。




将积分区域 $D$ 分为 $D_1$ 和 $D_2$ 两个区域，如下图所示（如果不分成两个部分，积分上、下限就无法确定）。



所以有

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

现在只需分别计算出 $\iint_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 和 $\iint_{D_2} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，然后相加即可。

先来计算 $\iint_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

由于积分区域 $D_1$ 不是圆或半圆或 $\frac{1}{4}$ 圆，所以应该利用直角坐标系法(而不是极坐标系法)来计算。

$$\iint_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{3x} x^2\mathrm{d}y = \frac{32}{3}$$

再来计算 $\iint_{D_2} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

同样利用直角坐标系法计算。

$$\iint_{D_2} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^6 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{8-x} x^2\mathrm{d}y = \frac{384}{3}$$

$\iint_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{32}{3}$，$\iint_{D_2} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{384}{3}$ 代入(1)式中，得

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{32}{3} + \frac{384}{3} = \frac{416}{3} \tag{2}$$

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1) = 1$。证明：

(Ⅰ)存在 $\xi \in (0, 1)$，使得 $f'(\xi) = 1$；

(Ⅱ)存在 $\eta \in (-1, 1)$，使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$。

**解**：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问是证明题，需证明“存在某数使得……”，并且要证明的等式中的函数法则后面的括号中出现了该数，所以该题属于“证明零点问题”的题型，应该按照“证明零点问题”的解题方法来求解。

“证明零点问题”的解题方法大体来说有两种：一是利用零点定理来证明，二是利用罗尔定理来证明。当要证明的等式中不含有导数时，用零点定理；当要证明的等式中含有导数时，就用罗尔定理。

第(Ⅰ)问要证明的等式 $f'(\xi) = 1$ 中含有导数，所以用罗尔定理来证明。

先来总结一下利用罗尔定理证明零点问题的方法

方法 1：直接使用罗尔定理来做。

方法 2：先设辅助函数(设辅助函数的方法是：如果把要证明的等式右侧部分都移到等式左侧后，再把“存在某数使得……”中的“某数”换为“$x$”，要证明的等式的形式是 $f'(x)+g(x)f(x)-q(x)=0$，那就设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}f(x)-\int \mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x$；如果要证明的等式的形式是 $f''(x)+g(x)f'(x)-q(x)=0$，那就设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}f'(x)-\int \mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x$；如果得到的并不是前两种形式，那就看哪个求完导是它，就把辅助函数设成谁)，然后再使用罗尔定理。

对于第(Ⅰ)问，很显然方法 1 无法证明，所以采用方法 2 来证明。即：先设辅助函数，然后再使用罗尔定理。

对于本题而言，把要证明的等式右侧部分都移到等式左侧，再把“存在某数使得……”中的“某数”换为“$x$”后，要证明的等式是 $f'(x)-1=0$，这明显是 $f'(x)+g(x)f(x)-q(x)=0$ 的形式(其中 $g(x)=0$，$q(x)=1$)，所以利用公式 $F(x)=\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}f(x)-\int \mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x$ 设辅助函数。

本题中 $g(x)=0$，$q(x)=1$，所以辅助函数 $F(x)$ 为

$$\begin{aligned}F(x)&=\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}f(x)-\int \mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}\times q(x)\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{\int 0\mathrm{d}x}f(x)-\int \mathrm{e}^{\int 0\mathrm{d}x}\times 1\mathrm{d}x\\&=f(x)-x\end{aligned}$$

接下来就可以使用罗尔定理了。显然函数 $F(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 内可导。

先来算一下 $F(0)$。

$F(0)=f(0)-0=f(0)$

由于函数 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$，$F(0)=0$。

再来算一下 $F(1)$。

$F(1)=f(1)-1=1-1=0$

综上所述，由于函数 $F(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 内可导，且 $F(0)=F(1)$，根据罗尔定理可知，在开区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $F'(\xi)=0$。

第(Ⅰ)问证明完毕。有一些同学可能会问：第(Ⅰ)问要证明的是“存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$”，怎么就证明完了？这里解释一下：我们已经证明出了在开区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $F'(\xi)=0$。而 $F(x)=f(x)-x$。所以 $F'(x)=f'(x)-1$，$F'(\xi)=0$ 就是 $f'(\xi)-1=0$，即 $f'(\xi)=1$。

再来看第(Ⅱ)问。

这第(Ⅱ)问也是“证明零点问题”的题型，所以也应该按照“证明零点问题”的解题方法来求解。

这第(Ⅱ)问要证明的等式 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$ 中含有导数，所以还是用罗尔定理来证明。

对于第(Ⅱ)问而言，显然用方法1无法证明，所以也应该用方法2来证明。即：先设辅助函数，然后再使用罗尔定理。

对于本题而言，把要证明的等式右侧部分都移到等式左侧，再把“存在某数使得……”中的“某数”换为“$x$”后，要证明的等式是 $f''(x)+f'(x)-1=0$，明显是 $f''(x)+g(x)f'(x)-q(x)=0$ 的形式(其中 $g(x)=1$，$q(x)=1$)，所以利用公式 $F(x)=e^{\int g(x)dx}f'(x)-\int e^{\int g(x)dx}q(x)dx$ 设辅助函数。

本题中 $g(x)=1$，$q(x)=1$，所以辅助函数 $F(x)$ 为

$$\begin{aligned}F(x)&=e^{\int g(x)dx}f'(x)-\int e^{\int g(x)dx}\times q(x)dx\\&=e^{\int 1dx}f'(x)-\int e^{\int 1dx}\times 1dx\\&=e^{x}f'(x)-e^{x}\\&=e^{x}(f'(x)-1)\end{aligned}$$

接下来就可以使用罗尔定理了。

由于第(I)问已经求出了 $f'(\xi)=1$，所以 $F(\xi)=e^{\xi}(f'(\xi)-1)=e^{\xi}\times 0=0$。

由于函数 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$ 为偶函数。$f'(-\xi)=f'(\xi)=1$，$F(-\xi)=e^{-\xi}(f'(-\xi)-1)=e^{-\xi}\times 0=0$。

综上所述，由于函数 $F(x)$ 在闭区间 $[-\xi,\xi]$ 内可导，且 $F(\xi)=F(-\xi)$，根据罗尔定理可知，在开区间 $(-\xi,\xi)$ 内至少存在一点 $\eta$，使得 $F'(\eta)=0$。所以在开区间 $(-1,1)$ 内就必然至少存在一点 $\eta$ 使得 $F'(\eta)=0$(因为区间 $(-1,1)$ 把区间 $(-\xi,\xi)$ 完全包含在其中)。

第(Ⅱ)问也证明完毕。有一些同学可能会问：第(Ⅱ)问要证明的是“存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$”，怎么证明完了？这里解释一下：我们已经证明了在开区间 $(-1,1)$ 内必然至少存在一点 $\eta$ 使得 $F'(\eta)=0$，而 $F(x)=e^{x}(f'(x)-1)$，$F'(x)=e^{x}[f''(x)+f'(x)-1]$，那么 $F'(\eta)=0$ 就是 $e^{\eta}[f''(\eta)+f'(\eta)-1]=0$。而 $e^{\eta}$ 一定大于0，所以 $f''(\eta)+f'(\eta)-1=0$，移项后就是 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

(19)(本题满分10分)

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geq 0,\ y\geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

**解**：由于“距离”肯定是正数，所以“距离最短”就意味着“距离的平方最短”，“距离最长”就意味着“距离的平方最长”。

所以只需求出“曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离的平方”，然后再开平方即可。

很明显，$x^3-xy+y^3=1$ 上的任意点 $(x,\ y)$ 到坐标原点 $(0,\ 0)$ 的距离肯定是 $x^2+y^2$。

所以“求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离的平方”大体上来说就是求 $x^2+y^2$ 在条件 $x^3-xy+y^3=1$ 下的条件极值。

这样就用条件极值的解题套路来解答。

设拉格朗日函数为 $L=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1)$。

则有

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda(3x^2-y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda(-x+3y^2)$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

即

$$2x+\lambda(3x^2-y)=0$$

$$2y+\lambda(-x+3y^2)=0$$

以上两个式子再结合 $x^3-xy+y^3=1$，就组成以下方程组

$$\begin{cases}2x+\lambda(3x^2-y)=0\\2y+\lambda(-x+3y^2)=0\\x^3-xy+y^3=1\end{cases}$$

解此方程组得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

把 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 代入到 $x^2+y^2$ 中，结果得 2。

很多同学做到这里都以为做完了，因为他们认为条件极值的解题套路到这里就结束了。但实际上不是这样，还差“$(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$”这个条件没有用上。

$(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ 说明对于曲线 $x^3-xy+y^3=1$ 而言，其端点是 $x=0$ 和 $y=0$。当 $x=0$ 时，很明显有 $y=1$；当 $x=1$ 时，很明显有 $y=0$。

所以还要把$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$和$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$代入$x^2+y^2$中。

把$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$代入到$x^2+y^2$中，得2。

把$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$代入到$x^2+y^2$中，得1。

把$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$代入到$x^2+y^2$中，得1。

所以，曲线$x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$上的点到坐标原点的最长距离的平方为2，最短距离的平方为1。

最后还要开平方。即：曲线$x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$上的点到坐标原点的最长距离为$\sqrt{2}$，最短距离为1。

(20)(本题满分11分)

设函数$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$。

(Ⅰ)求$f(x)$的最小值；

(Ⅱ)设数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$。证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限。

**解**：先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问并没有指明求的是哪个区间的最值，说明求的是整个定义域区间$(0,+\infty)$内的最值。

现在的解题思路是：先求定义域$(0,+\infty)$内的所有极值，然后再求两个端点的极限值，最后进行比较。

先来求定义域$(0,+\infty)$内的所有极值。

要想求极值，就要先求极值点，而极值点或者是驻点(一阶导函数为0的点)，或者是一阶导函数没有定义的点。

所以首先求驻点。

由于$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，所以$f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$，令$f'(x)=0$，解得$x=1$。

然后再求一阶导函数没有定义的点。

在定义域$(0,+\infty)$内，一阶导函数$f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$不存在没有定义的点。

综上所述，驻点和一阶导函数没有定义的点一共有一个(其中驻点一个，一阶导函数没

有定义的点零个)。也就是说，可能极值点一共有一个。现在要验证一下这个可能极值点到底是不是真正的极值点。

在区间 $(0, 1)$ 内任意取一个点，如 $\frac{1}{2}$，把 $x = \frac{1}{2}$ 代入 $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$ 中，发现 $f'(\frac{1}{2}) < 0$；在区间 $(1, +\infty)$ 内任意取一个点，如 2，把 $x = 2$ 代入 $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$，发现 $f'(2) > 0$。由于异号，所以点 $x = 1$ 的确是极值点(而且是极小值点)。

极小值点 $x = 1$ 所对应的极小值为 $f(1) = 1$。

原本接下来应该求的是两个端点的极限值了。但对于本题来说，不用再求了。因为刚才计算出的极值点只有一个，我们知道，当某函数在某区间内的极值点唯一时，那么该极值点肯定是该函数在该区间内的最值点。

有的同学可能会反驳说：就算现在已经确定了 $f(1) = 1$ 是最小值，那区间端点不是也有可能是最大值吗？为什么不算了？

这个问题非常简单：本题所给的区间两边全是开的，所以最值绝对不可能在区间端点取到。

综上所述，$f(x)$ 没有最大值，有最小值，最小值是 $f(1) = 1$。

再来看第(Ⅱ)问。

首先证明极限存在。

证明数列极限存在的方法一般是“单调有界”。具体来说，或者证明单调递增有上界，或者证明单调递减有下界。

第(Ⅱ)问中出现了“$\ln x_n$”，这就隐含地告诉我们数列 $\{x_n\}$ 的每一项肯定都是正的。

第(I)问证明了函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 1，即 $\ln x + \frac{1}{x} \geqslant 1\ (0, +\infty)$，所以有 $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geqslant 1$。

已知 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$，所以有 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < \ln x_n + \frac{1}{x_n}$，即 $\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{x_n}$。

在不等式 $\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{x_n}$ 的两侧同时乘以 $x_n x_{n+1}$（数列 $\{x_n\}$ 是正数列，所以乘完之后不等号不改变），得 $x_n < x_{n+1}$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递增。

已知 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$，而数列 $\{x_n\}$ 是正数列，所以 $\frac{1}{x_{n+1}} > 0$，于是 $\ln x_n < 1$，$x_n < \mathrm{e}$，所以数列 $\{x_n\}$ 有上界。

综上所述，由于数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界，所以数列 $\{x_n\}$ 的极限存在。

然后再求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$。

已知 $\ln x_n + \dfrac{1}{x_{n+1}} < 1$，根据“保号性的推论”有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln x_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}1$，即

$$\ln a + \frac{1}{a} \leqslant 1 \tag{1}$$

由于 $\ln x_n + \dfrac{1}{x_n} \geqslant 1$，根据“保号性的推论”有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln x_n + \dfrac{1}{x_n}) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty}1$，即

$$\ln a + \frac{1}{a} \geqslant 1 \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\ln a + \frac{1}{a} = 1 \tag{3}$$

由(3)式可解得 $a = 1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 1$。

(21)(本题满分 11 分)

设曲线 $L$ 的方程为 $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln x(1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e})$.

(Ⅰ)求 $L$ 的弧长。

(Ⅱ)设 $D$ 是由曲线 $L$，直线 $x = 1$，$x = \mathrm{e}$ 及 $x$ 轴所围成的平面图形，求 $D$ 的形心的横坐标。

**解：**先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问考查的是计算弧长的公式 $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$。

本题中，弧长为

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{1 + \left[\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right)'\right]^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{\frac{1}{4}\left(2 + x^2 + \frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}\left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^2 + 1}{4}$$

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问考查的是计算形心坐标的公式 $\bar{x} = \dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$，$\bar{y} = \dfrac{\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$。

本题只要求计算横坐标，所以利用公式 $\bar{x} = \dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$ 即可。也就是说要分别计算出 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 和 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，然后相除。

先来计算 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

按照常规，首先需要在平面直角坐标系中画出积分区域 $D$。然而，对于本题而言，积分区域 $D$ 却并不容易画。这是因为：$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x(1 \leqslant x \leqslant e)$ 的图比较难画。

怎么办呢？那就不画图了。

画图的目的是为了确定积分上、下限，所以画图不是最终的目的，只是实现目的的一种途径而已。换言之，如果可以不画图就确定积分上、下限，那么“画图”这一步就可以省略了。

那么，究竟如何做到不画图而确定积分上、下限呢？其实很简单，对于 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$，可以轻易证明在区间 $[1, e]$ 上是大于 0 的(证明的方法是：求 $y' = \frac{x^2 - 1}{2x}$，在区间 $[1, e]$ 上 $y' = \frac{x^2 - 1}{2x}$ 明显是大于等于 0 的，这就说明 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递增，又有 $y(1) = \frac{1}{4} > 0$，而 1 是区间 $[1, e]$ 的左端点，所以函数在该区间上是大于 0 的)。

由此可知，积分上、下限就可以确定了，即

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^e \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x} x\mathrm{d}y = \frac{e^4 - 2e^2 - 3}{16}$$

再来计算 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

由于积分区域仍然是 $D$，所以积分上、下限还是和前述一样(只是被积函数不同罢了)，即

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^e \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x} \mathrm{d}y = \frac{e^3-7}{12}$$

所以

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{\frac{e^4-2e^2-3}{16}}{\frac{e^3-7}{12}} = \frac{3(e^4-2e^2-3)}{4(e^3-7)}$$

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$。当 $a$、$b$ 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$。

**解**：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问问的是“当 $a$、$b$ 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$”。矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是几行几列的矩阵？显然是两行两列的矩阵(因为既然 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，就必然说明矩阵 $\boldsymbol{AC}$ 和矩阵 $\boldsymbol{CA}$ 都存在，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 既可以左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可以右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，也就是说矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数，并且矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，所以矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是两行两列的矩阵)。

设 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，而矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，根据矩阵乘法法则，$\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} x_1+ax_3 & x_2+ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{CA} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & ax_1 \\ x_3+x_4 & ax_3 \end{pmatrix}$。

已知 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，所以有

$$\begin{pmatrix} x_1+ax_3 & x_2+ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1+x_2 & ax_1 \\ x_3+x_4 & ax_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

整理成方程组的形式：

$$\begin{cases} -x_2+ax_3=0 \\ -ax_1+x_2+ax_4=1 \\ x_1-x_3-x_4=1 \\ x_2-ax_3=b \end{cases}$$

这明显是一个非齐次方程组。第(Ⅰ)问问的是“当 $a$、$b$ 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得

$\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$”，现在可以转化成“当 $a$、$b$ 为何值时，非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$ 有解”。

先来把非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$ 写为矩阵的形式：$\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}$。

将矩阵 $\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}$ 化为阶梯型矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b\end{pmatrix}$。

大家都知道，当矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b\end{pmatrix}$ 的秩与矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-a&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的秩相等时，非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$ 有解。矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-a&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的秩很明显是 2，所以矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b\end{pmatrix}$ 的秩也应是 2。由此可得 $a=-1$，$b=0$。

再来看第（Ⅱ）问。

第（Ⅱ）问是求矩阵 $\boldsymbol{C}$，前面已经设矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，所以现在只需解出 $x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$ 即可。

将第(I)问中求得的 $a=-1$, $b=0$ 代入非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$ 中,

得 $\begin{cases}-x_2-x_3=0\\x_1+x_2-x_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2+x_3=0\end{cases}$。

现在只需解非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2-x_3=0\\x_1+x_2-x_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2+x_3=0\end{cases}$ 即可求出 $x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$。下面来复习一下求非齐次方程组通解的方法。

第一步:写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩 $r_1$、$r_2$。

第二步:判断解的类型。

情况1:若 $r_1\neq r_2$,则该非齐次方程组无解。

情况2:若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2=n$(未知数个数),则该非齐次方程组有唯一的解,不用再进行第三步。

情况3:若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2<n$(未知数个数),则该非齐次方程组有无穷多解,需要进行第三步。

第三步:先当成对应的齐次方程组,按求齐次方程组的步骤(3)求出齐次方程组的通解。然后再还原成非齐次方程组,令自由未知数取全零,求出非齐次方程组的一个特解。最后,用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解,得到的就是非齐次方程组的通解。

按照以上三个步骤,解出非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2-x_3=0\\x_1+x_2-x_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2+x_3=0\end{cases}$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$,其中 $k_1$、$k_2$ 为任意常数。

也就是说，$x_1 = 1 + k_1 + k_2$，$x_2 = -k_1$，$x_3 = k_1$，$x_4 = k_2$。因为设 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 + k_1 + k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$。

（23）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$，记 $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$。

（Ⅰ）证明二次型 $f$ 对应的矩阵为 $2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}} + \vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$；

（Ⅱ）若 $\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$。

**解：** 先来看第（Ⅰ）问。

第（Ⅰ）问要证明二次型 $f$ 对应的矩阵为 $2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}} + \vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$。设 $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则最终只需证明：

$f(x_1, x_2, x_3) = \vec{X}^{\mathrm{T}}(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}} + \vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\vec{X}$ 且矩阵 $2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}} + \vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵。

有些同学可能不太明白，他们认为最终只需证明 $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{X}^{\mathrm{T}}(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}} + \vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\vec{X}$ 即可。为什么还要证明矩阵 $2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}} + \vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵呢？这是因为：比如某二次型既可以表示成 $\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$ 又可以表示成 $\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\vec{X}$，$\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵而 $\boldsymbol{B}$ 不是对称矩阵，那么该二次型的对应矩阵就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而不是矩阵 $\boldsymbol{B}$。现在大家明白了吧。

下面正式开始证明。

由题意可知

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \tag{1}$$

由于 $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，根据矩阵乘法法则有

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \vec{X}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha} \tag{2}$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{X} \tag{3}$$

由于 $\vec{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\vec{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，根据矩阵乘法法则有

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=\vec{X}^{\mathrm{T}}\vec{\beta} \tag{4}$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{X} \tag{5}$$

将(2)式、(3)式、(4)式、(5)式均代入(1)式，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2\vec{X}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{X}+\vec{X}^{\mathrm{T}}\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{X} \tag{6}$$

由于矩阵乘法对于矩阵加减法满足分配律，所以(6)式可以变为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\vec{X}^{\mathrm{T}}(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\vec{X} \tag{7}$$

现在已经证明了 $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{X}^{\mathrm{T}}(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\vec{X}$，又因为矩阵 $2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$ 很明显是一个对称矩阵，所以二次型 $f$ 对应的矩阵为 $2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是说 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 正交且均为单位向量，要求证明 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$。这问题其实可以转化为“若 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明矩阵 $2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的三个特征值为 0、1、2”。

为方便表示，记矩阵 $\boldsymbol{A}=2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$，那么最终只需证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值是 0、1、2 即可。

先证明 0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

由于 $\boldsymbol{A}=2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$，所以 $r(\boldsymbol{A})=r(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})$。根据公式 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$ 可知 $r(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})$，所以有 $r(\boldsymbol{A})\leqslant r(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})$。而 $r(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 2$，所以有 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$。于是有 $r(\boldsymbol{A})<3$。而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，秩小于 3 就意味着它不满秩。由方阵不满秩立刻可以推出该方阵对应的行列式等于0，所以有 $|\boldsymbol{A}|=0$。由此可知，0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(因为一个矩阵的所有特征值之积等于该矩阵所对应的行列式的值，如果0 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，那么乘积不会是0)。

再来证明 1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

由于 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 正交，所以有 $\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\beta}=0,\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}=0$。由于 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 均为单位向量，所以有 $\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}=1$，$\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\beta}=1$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\vec{\alpha}&=(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\vec{\alpha}\\&=2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\vec{\alpha}(\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}) + \vec{\beta}(\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}) \\
&= 2\vec{\alpha} \times 1 + \vec{\beta} \times 0 \\
&= 2\vec{\alpha}
\end{aligned}
$$

根据特征值、特征向量的定义式可知，2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

最后来证明 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

由于 $\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$ 正交，所以有 $\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\beta} = 0$，$\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha} = 0$。由于 $\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$ 均为单位向量，所以有 $\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha} = 1$，$\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\beta} = 1$。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\vec{\beta} &= (2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}} + \vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\vec{\beta} \\
&= 2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\beta} \\
&= 2\vec{\alpha}(\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\beta}) + \vec{\beta}(\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\beta}) \\
&= 2\vec{\alpha} \times 0 + \vec{\beta} \times 1 \\
&= \vec{\beta}
\end{aligned}
$$

根据特征值、特征向量的定义式可知，1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

综上所述，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值是 0、1、2，所以 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$。

# 2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题及精解

## 一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为(　　)。

(1)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

**解**：渐近线分为三种：水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线。

要想解答本题，就必须知道这三种渐近线究竟应该怎么求。所以，先给大家讲一下以上三种渐近线的求法。

先来看水平渐近线的求法。

已知函数 $f(x)$，求该函数的水平渐近线时，需要分 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情况。

$x\to+\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，若结果是“常数 $a$”，则 $y=a$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

$x\to-\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，若结果是“常数 $b$”，则 $y=b$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线(如果“常数 $a$ =常数 $b$”，那么 $y=a$ 和 $y=b$ 就是同一条水平渐近线)。

再来看铅直渐近线的求法。

已知函数 $f(x)$，求该函数的铅直渐近线时，需要找一种点，即函数 $f(x)$ 在该点处没有定义，但是存在一个该点的左去心邻域(或者存在一个该点的右去心邻域，或者存在一个该点的去心邻域)，函数 $f(x)$ 在该邻域内有定义。

将找到的点记为 $x_0$。

然后计算 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，如果这两者的计算结果中至少有一个是 $\infty$，那就说明 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的铅直渐近线。

最后看斜渐近线的求法。

已知函数 $f(x)$，求该函数的斜渐近线时，需要分 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情况。

$x\to+\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，若结果是“非零常数 $a$”，则再计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$，若结果是“常数 $b$”，则 $y=ax+b$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

$x\to-\infty$的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，若结果是“非零常数 $c$”，则再计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-cx]$，若结果是“常数 $d$”，则 $y=cx+d$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线(如果“常数 $a$ = 常数 $b$”，“常数 $c$ = 常数 $d$”，那么 $y=ax+b$ 和 $y=cx+d$ 就是同一条斜渐近线)。

水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线的求法已经介绍给大家。下面正式来看本题。

先看曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有没有水平渐近线。

$x\to+\infty$ 的情况：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=1$$

所以 $y=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的一条水平渐近线。

$x\to-\infty$ 的情况：

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=1$$

所以 $y=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的一条水平渐近线(这和刚才求得的是同一条水平渐近线)。

综上所述，曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有一条水平渐近线。

再看曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有没有铅直渐近线。

由于 $x=1$ 和 $x=-1$ 是函数 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的没有定义的点，所以需要计算 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$、$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$、$\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$、$\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$。

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$$

所以 $x=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的一条铅直渐近线(而且 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 就可以不用再求了)。

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\neq\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\neq\infty$$

所以 $x=-1$ 不是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的铅直渐近线。

综上所述，曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有一条铅直渐近线。

最后来看曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有没有斜渐近线。

大家应该听过一句话:“有水平无斜，有斜无水平”。这句话的意思是：如果某曲线在 $x\to+\infty$的情况下有水平渐近线，那么该曲线在 $x\to+\infty$的情况下肯定没有斜渐近线。如果某曲线在 $x\to-\infty$的情况下有水平渐近线，那么该曲线在 $x\to-\infty$的情况下肯定没有斜渐近线。

而对于本题所给的曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$，它在 $x\to+\infty$和 $x\to-\infty$的情况下都有水平渐近线，所以在 $x\to+\infty$和 $x\to-\infty$的情况下肯定都没有斜渐近线。

所以，曲线 $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$ 没有斜渐近线。

综上所述，本题所给的曲线共有两条渐近线，应该选择(C)选项。

(2)设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 $n$ 为正整数，则 $f'(0)=$(　　)。

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$　　(D) $(-1)^n n!$

**解:** 本题乍一看似乎很简单，就是先求出导函数，然后再把0代入导函数中即可。

可是实际上，本题并没有那么简单。难点就在“如何求导”。因为本题所给的函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$ 是 $n$ 项连乘的形式，所以求导比较困难。

那该怎么办呢？我问问大家，多项连乘求导比较困难，那么两项相乘求导大家会不会？当然会，前导后不导加后导前不导就可以了嘛。所以，我们要想办法将本题所给的多项连乘的函数转化为两项相乘的形式。怎么转化？设辅助函数。

设 $g(x)=(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$。为什么要这样设呢？因为这样设之后，$f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$ 就变成了 $f(x)=(e^x-1)g(x)$，即多项相乘被转化为两项相乘。

现在来求 $f'(x)$。

由于 $f(x)=(e^x-1)g(x)$，所以 $f'(x)=e^x g(x)+(e^x-1)g'(x)$。

$f'(x)$ 已经求出来了，接下来只需把0代入 $f'(x)$ 中，计算出 $f'(0)$ 就可以了。

由于 $f'(x)=e^x g(x)+(e^x-1)g'(x)$，所以 $f'(0)=e^0 g(0)+(e^0-1)g'(0)$。

接下来计算一下 $e^0 g(0)+(e^0-1)g'(0)$，计算出的结果就是本题最终的答案。

由于 $e^0=1$，所以 $e^0 g(0)+(e^0-1)g'(0)=g(0)$。

现在只需计算出 $g(0)$ 即可。

由于设 $g(x)=(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，所以

$$\begin{aligned}g(0)&=(e^{2\times0}-2)\cdots(e^{n\times0}-n)\\&=(1-2)\times(1-3)\times\cdots\times(1-n)\\&=(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]\\&=(-1)^{n-1}\times1\times2\times\cdots\times(n-1)\\&=(-1)^{n-1}\times(n-1)!\end{aligned}$$

所以本题应该选择(A)选项。

(3)设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的(　　)。

(A)充分必要条件　　(B)充分非必要条件

(C)必要非充分条件　　(D)既非充分也非必要条件

**解**：先来考察一下充分性。

已知 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，所以 $a_{n+1}>0\ (n=1,2,\cdots)$。由于 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，所以 $S_{n+1}=a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}$，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$。

由于 $a_{n+1}>0$，所以 $S_{n+1}-S_n>0$，移项得 $S_{n+1}>S_n$，也就是说数列 $\{S_n\}$ 是单调递增的数列。

已知数列 $\{S_n\}$ 有界，这说明数列 $\{S_n\}$ 既有上界又有下界。

综上所述，数列 $\{S_n\}$ 单调递增且有上界，所以数列 $\{S_n\}$ 收敛。转化为数学语言就是“$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在”。

由于 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，所以 $S_n$ 很明显是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 $n$ 项之和。由于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 $n$ 项之和的极限存在，根据正项级数收敛的定义可知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

由正项级数收敛的必要条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

综上所述，充分性成立。

再来考察一下必要性。

必要性很明显是不成立的，来给大家举个反例。例如，设数列 $\{a_n\}$ 是一个常数列，它的每一项都为 1，即通项 $a_n=1$。那么，很明显数列 $a_n$ 是收敛的(因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$)，但是数列 $\{S_n\}$ 却是无界的(因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$，肯定是无界的)。

所以必要性不成立。

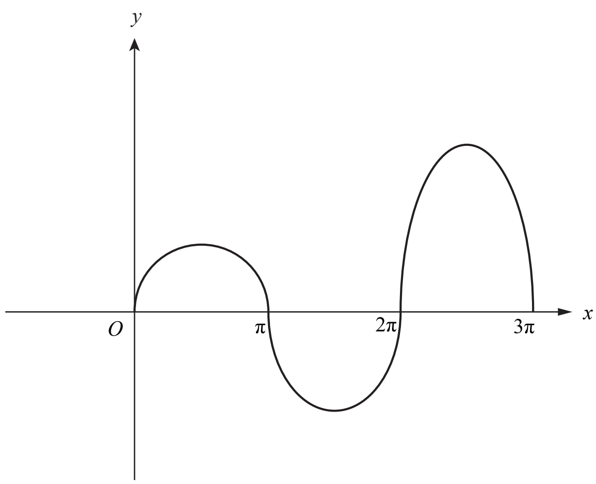
由于充分性成立而必要性不成立，所以数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分非必要条件，本题应该选择(B)选项。

(4)设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k = 1, 2, 3)$，则有(　　)。

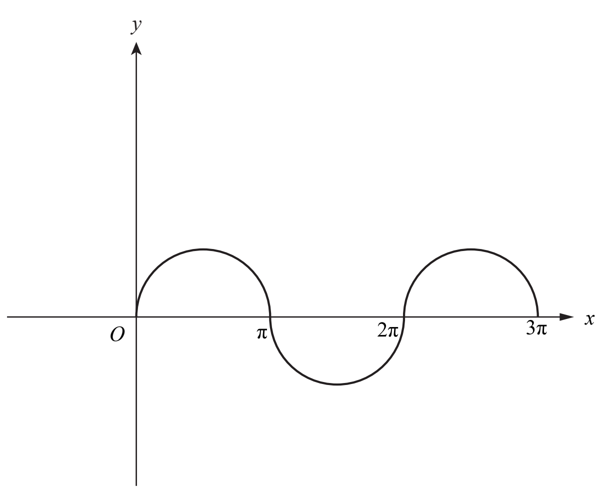
(A) $I_1 < I_2 < I_3$　　(B) $I_3 < I_2 < I_1$

(C) $I_2 < I_3 < I_1$　　(D) $I_2 < I_1 < I_3$

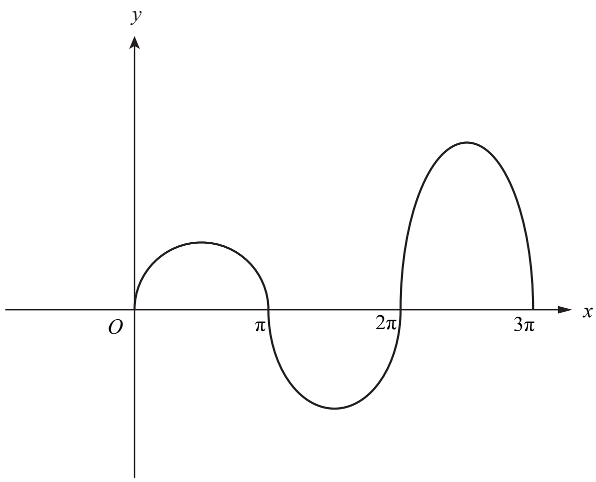
**解：**本题采用面积来算。先在平面直角坐标系中画出函数 $y = e^{x^2}\sin x$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上的图像,如下图所示。



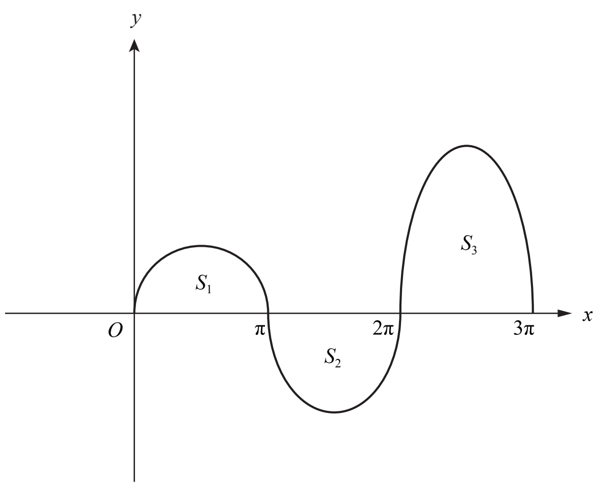

有的同学可能不太明白为何函数 $y = e^{x^2}\sin x$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上的图像是这样的，这里解释一下。函数 $y = \sin x$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上的图像肯定如下图所示。



而函数 $y = e^{x^2}$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上大于 0 并且函数值是随着 $x$ 的增大而增大的。那么函数 $y = e^{x^2}\sin x$ 的图像就如下图所示。




为了后续方便表示，将上图中的三个封闭区域的面积用符号来代表，如下图所示。




需要说明两点。

第一点：$S_1$、$S_2$、$S_3$ 都是正数。因为它们代表的是面积，不可能是负数。

第二点：必然有 $S_3 > S_2 > S_1$。

已知 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k = 1, 2, 3)$，所以有

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$$

$I_3=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$

本题要比较的就是 $I_1$、$I_2$、$I_3$ 的大小。

先来看 $I_1$。

$I_1=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x$，其中 $\int_0^{\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x$ 表示的是：由 $x=0$、$x=\pi$、$y=e^{x^2}\sin x$、$y=0$ 这四条线所围成的封闭图形的面积，即 $S_1$，所以有

$$I_1=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x=S_1$$

由于 $S_1>0$，所以 $I_1>0$。

再来看 $I_2$。

$I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}(0-e^{x^2}\sin x)\mathrm{d}x$，$\int_{\pi}^{2\pi}(0-e^{x^2}\sin x)\mathrm{d}x$ 表示的是：由 $x=\pi$、$x=2\pi$、$y=0$、$y=e^{x^2}\sin x$ 这四条线所围成的封闭图形的面积，即 $S_2$。所以有

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}(0-e^{x^2}\sin x)\mathrm{d}x=S_1-S_2\end{aligned}$$

由于 $S_1<S_2$，所以 $S_1-S_2$ 必然小于0，可得 $I_2<0$。

最后来看 $I_3$。

$$\begin{aligned}I_3&=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}(0-e^{x^2}\sin x)\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中 $\int_{2\pi}^{3\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x$ 表示的是：由 $x=2\pi$、$x=3\pi$、$y=e^{x^2}\sin x$、$y=0$ 这四条线所围成的封闭图形的面积，即 $S_3$。所以有

$$\begin{aligned}I_3&=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}(0-e^{x^2}\sin x)\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}(e^{x^2}\sin x-0)\mathrm{d}x\\&=S_1-S_2+S_3\\&=S_1+(S_3-S_2)\end{aligned}$$

由于 $S_3>S_2$，所以 $S_3-S_2$ 必定大于0，而 $S_1=I_1$，所以 $I_3>I_1$。

综上所述，$I_1$ 是一个正数，$I_3$ 是一个大于 $I_1$ 的正数，而 $I_2$ 是一个负数，所以有 $I_2<I_1<I_3$，

本题应该选择(D)选项。

(5)设函数$f(x, y)$为可微函数，且对任意的$x, y$都有$\frac{\partial(x, y)}{\partial x} > 0$，$\frac{\partial(x, y)}{\partial y} < 0$，则使不等式$f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2)$成立的一个充分条件是(　　)。

(A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$　　(B) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$

(C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$　　(D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$

**解**：已知$\frac{\partial(x, y)}{\partial x} > 0$，这说明当$y$固定时，对$x$是单调递增的。所以有如下结论成立。

结论①：当$x_1 < x_2$时，$f(x_1, y_1) < f(x_2, y_1)$。

已知$\frac{\partial(x, y)}{\partial y} < 0$，这说明当$x$固定时，对$y$是单调递减的。所以有如下结论成立。

结论②：当$y_1 > y_2$时，$f(x_2, y_1) < f(x_2, y_2)$。

综合结论①和结论②，可知：当$x_1 < x_2$且$y_1 > y_2$时，有$f(x_1, y_1) < f(x_2, y_1) < f(x_2, y_2)$。

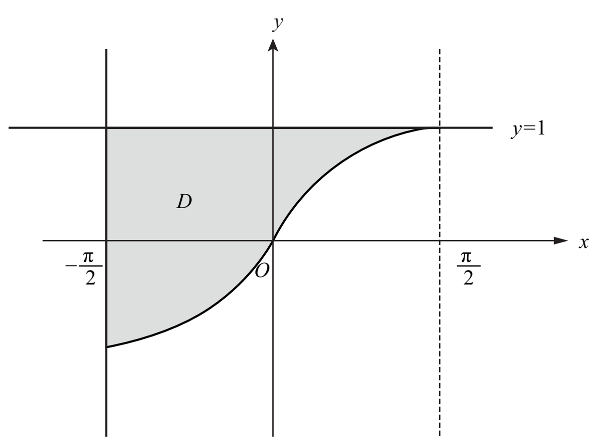
所以本题应该选择(D)选项。

(6)　设区域$D$由曲线$y = \sin x$、$x = \pm\frac{\pi}{2}$、$y = 1$围成，则$\iint\limits_D (xy^5 - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$(　　)。

(A) $\pi$　　(B) 2

(C) $-2$　　(D) $-\pi$

**解**：已知区域$D$由曲线$y = \sin x$、$x = \frac{\pi}{2}$、$x = -\frac{\pi}{2}$、$y = 1$所围成，先在平面直角坐标系中画出区域$D$，如下图所示。



接下来把二重积分 $\iint\limits_D (xy^5-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“内层对 $y$，外层对 $x$”的二次积分，即

$$\iint\limits_D (xy^5-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d (xy^5-1)\,\mathrm{d}y$$

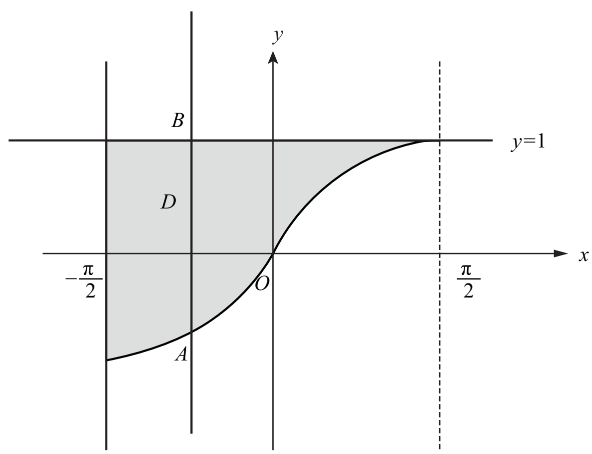
接下来的任务就是确定 $x$ 的积分上下限 $a$、$b$ 以及 $y$ 的积分上下限 $c$、$d$。

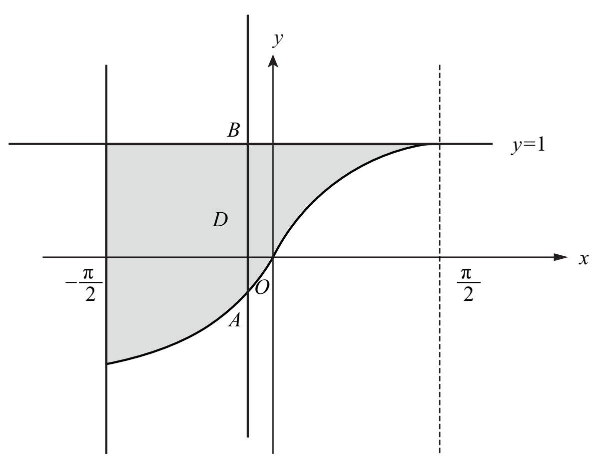
先来确定 $x$ 的积分上下限 $a$、$b$。

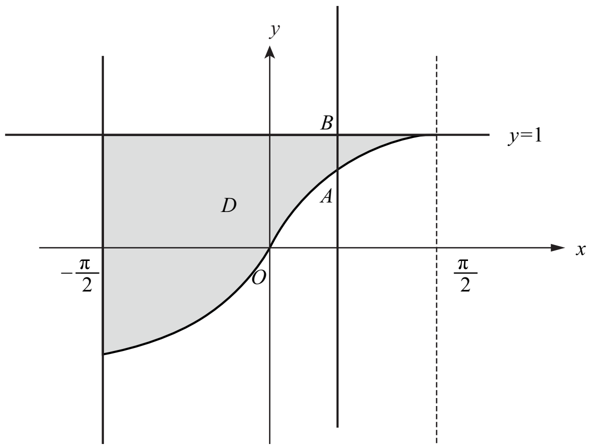
由于阴影区域 $D$ 中横坐标的最小值是 $-\dfrac{\pi}{2}$，横坐标的最大值是 $\dfrac{\pi}{2}$，所以 $a=-\dfrac{\pi}{2}$，$b=\dfrac{\pi}{2}$。

再来确定 $y$ 的积分上下限 $c$、$d$。

在上面的图中画一条平行于 $y$ 轴且与阴影区域相交的直线，如下图所示。






从图中可以看出，虽然这条直线有无数种画法，但是该直线和阴影区域的公共部分一定是一条线段。在这条线段上，纵坐标的最小值肯定是在 $A$ 点，纵坐标的最大值肯定是在 $B$ 点。而 $A$ 点的纵坐标是 $\sin x$，$B$ 点的纵坐标是 1。所以 $c=\sin x$，$d=1$。

综上所述，有 $a=-\frac{\pi}{2}$，$b=\frac{\pi}{2}$，$c=\sin x$，$d=1$。所以 $\iint\limits_D(xy^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}(xy^5-1)\mathrm{d}y$。

通过计算可知，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}(xy^5-1)\mathrm{d}y=-\pi$，所以本题应该选择(D)选项。

(7)设 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_4}=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 $c_1$，$c_2$，$c_3$，$c_4$ 为任意常数，则下列向量组线性相关的为(　　)。

(A) $\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$，$\overrightarrow{\alpha_3}$　　(B) $\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$，$\overrightarrow{\alpha_4}$

(C) $\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_3}$，$\overrightarrow{\alpha_4}$　　(D) $\overrightarrow{\alpha_2}$，$\overrightarrow{\alpha_3}$，$\overrightarrow{\alpha_4}$

**解**：先来看(A)选项。

由于 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，所以矩阵 $(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$。这是一个方阵，一定存在对应的行列式。即

$$|\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

通过计算可知 $|\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=-c_1$，已知 $c_1$ 为任意常数。如果 $c_1=0$ (即行列式 $\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0$)，那么就有：矩阵 $(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})$ 不满秩，即矩阵 $(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})$ 的秩小于3，那么向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 就是线性相关的。可是，$c_1$ 如果不等于0呢？那么向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 就是线性无关的。$c_1$ 为任意常数，既可以等于0也可以不等于0。所以不能确定向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 是否线性相关，本题不能选择(A)选项。

再来看(B)选项。

由于 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_4}=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，所以矩阵 $(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_4})=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&1\\c_1&c_2&c_4\end{pmatrix}$。这是一个方阵，一定存在对应的行列式。即

$$|\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_4}|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&1\\c_1&c_2&c_4\end{vmatrix}$$

通过计算可知 $|\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_4}|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&1\\c_1&c_2&c_4\end{vmatrix}=c_1$，已知 $c_1$ 为任意常数。所以不能确定向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_4}$ 是否线性相关,本题不能选择(B)选项。

再来看(C)选项。

由于 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_4}=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，所以矩阵 $(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4})=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{pmatrix}$。这是一个方阵，一定存在对应的行列式。即

$$|\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4}|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}$$

通过计算可知 $|\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4}|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=0$，这说明不管 $c_1,c_2,c_3,c_4$ 取何值，$|\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4}|$ 都等于0，必然有：矩阵 $(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4})$ 不满秩，则向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4}$ 就是线性

相关的。所以本题应该选择(C)选项。

最后来看(D)选项。

由于 $\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\overrightarrow{\alpha_4}=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，所以矩阵 $(\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4})=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\c_2&c_3&c_4\end{pmatrix}$。

这是一个方阵，一定存在对应的行列式。即

$$|\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4}|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\c_2&c_3&c_4\end{vmatrix}$$

通过计算可知 $|\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4}|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\c_2&c_3&c_4\end{vmatrix}=-c_3-c_4$，已知 $c_3$、$c_4$ 为任意常数。所以不能确定向量组 $\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4}$ 是否线性相关，本题不能选择(D)选项。

综上所述，本题应该选择(C)选项。

(8)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。若 $\boldsymbol{P}=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})$，$\boldsymbol{Q}=(\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=($　　$)$。

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

**解：** 由于 $\boldsymbol{Q}=(\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})$，所以可以将矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 写为 $\boldsymbol{Q}=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。而 $\boldsymbol{P}=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})$，所以有 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

由此可得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\left[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\times\boldsymbol{A}\times\left[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

根据公式 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，上式可以变为

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\left[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\times\boldsymbol{A}\times\left[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\times\boldsymbol{P}^{-1}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

矩阵的乘法具有结合律，所以有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\left[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\times\boldsymbol{A}\times\left[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\times\boldsymbol{P}^{-1}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\times(\boldsymbol{P}^{-1}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P})\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

已知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

下面来计算一下 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$。

由于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 是初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{12}(1)$，所以不必用常规的方法求 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵，直接根据初等矩阵的逆矩阵公式 $[\boldsymbol{E}_{ij}(k)]^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}(-k)$ 就可求得 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

所以 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

接下来利用矩阵乘法算出这三个矩阵的乘积就可以了。不过要提示大家一点，由于最左侧的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和最右侧的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 都是初等矩阵，所以用如下方法来求会比较方便：

首先要求 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。由于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的第 1 行乘以 $-1$ 加到第 2 行得到的，所以将 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的第 1 行乘以 $-1$ 加到第 2 行就是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。所以 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。

所以

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的第 2 列乘以 1 加到第 1 列得到的，所以将 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的第 2 列乘以 1 加到第 1 列就是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 所以 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 本题应该选择(B)选项。

## 二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9)设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________。

**解**：要求出 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$，需要进行三个步骤：一是求出 $\frac{dy}{dx}$，二是求出 $\frac{d^2y}{dx^2}$，三是求出最终的 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$。

先来求出 $\frac{dy}{dx}$。

由于 $x^2-y+1=e^y$，将等式左右两侧同时对 $x$ 求导得 $2x-\frac{dy}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$，解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1+e^y}$。

再来求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{2x}{1+e^y}\right)}{dx}=\frac{2(1+e^y)-2xe^y\frac{dy}{dx}}{(1+e^y)^2}$$

将 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1+e^y}$ 代入 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(1+e^y)-2xe^y\frac{dy}{dx}}{(1+e^y)^2}$ 中，得 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(1+e^y)-\frac{4x^2e^y}{1+e^y}}{(1+e^y)^2}$。

最后来求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$。

有的同学认为，直接把 $x=0$ 代入 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(1+e^y)-\frac{4x^2e^y}{1+e^y}}{(1+e^y)^2}$ 中就可以了。可是实际上，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(1+e^y)-\frac{4x^2e^y}{1+e^y}}{(1+e^y)^2}$ 中不光包含 $x$，还包含 $y$。所以应该先把 $x=0$ 代入方程 $x^2-y+1=e^y$ 中求出 $y$，然后再把 $x=0$ 和求出的 $y$ 都代入 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(1+e^y)-\frac{4x^2e^y}{1+e^y}}{(1+e^y)^2}$ 中。

把 $x=0$ 代入方程 $x^2-y+1=e^y$ 中，解得 $y=0$。

把 $x=0$、$y=0$ 代入 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2(1+e^y)-\dfrac{4x^2e^y}{1+e^y}}{(1+e^y)^2}$ 中，求得

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\frac{2(1+e^0)-\dfrac{4\times 0^2\times e^0}{1+e^0}}{(1+e^0)^2}=1$$

所以本题应填1。

（10）$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________。

**解：** $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)$ 很明显可以化为

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right) \tag{1}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\dfrac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\dfrac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$ 可以写为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} \tag{3}$$

现在来计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$ 中出现了“连加符号 $\sum$ ”，所以应该用积分和式法来做。

第一步：将 $\sum$ 里面的函数抽象为 $f(\dfrac{a}{b})$，其中 $a=x_1i+x_2$，$b=x_3n+x_4$。

本题中，$\sum$ 里面的函数是 $\dfrac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$，显然是 $\dfrac{i}{n}$ 的一个函数，所以应该把 $\dfrac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$ 抽象为 $f(\dfrac{i}{n})$。

本题中 $x_1=1$，$x_2=0$，$x_3=1$，$x_4=0$。经过抽象，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}$ 变为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)$。

第二步：让 $\sum$ 下方的 $i$ 取三个值。第一个值是 $\sum$ 下方 $i$ 等于的那个数，第二个值是比 $\sum$ 下方 $i$ 等于的那个数大 1 的数，第三个值是 $\sum$ 上方的那个数。

本题中，由于 $\sum$ 下方是 $i=1$，$\sum$ 上方的数是 $n$,所以应该让 $i$ 取 $i=1$，$i=2$，$i=n$。

第三步：将刚才取的三个 $i$ 的值代入$\dfrac{a}{b}$中，计算出三个$\dfrac{a}{b}$。

本题中，$\dfrac{a}{b}$是$\dfrac{i}{n}$，所以将 $i=1$，$i=2$，$i=n$ 代入$\dfrac{i}{n}$中，然后计算出的三个值为：$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{2}{n}$，1。

第四步：用算出的第二个值减去第一个值来确定前面应该乘以多少，然后看第一个值和第三个值分别离哪个常数最近来确定积分上下限。

本题中，第二个值是$\dfrac{2}{n}$，第一个值是$\dfrac{1}{n}$，则有$\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}$,即前面应该乘以$\dfrac{1}{n}$。第一个值$\dfrac{1}{n}$很显然离常数 0 最近，所以积分下限是 0。第三个值 1 显然离常数 1 最近(本身它自己就是 1)，所以积分上限是 1。

综上所述有

$$\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

注意：假设第二个值减去第一个值等于$\dfrac{2}{n}$，那么就是

$$\frac{2}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

第五步：计算最终的结果。

本题中，$\dfrac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，由于 $f\left(\dfrac{i}{n}\right)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$。$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$。所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\frac{\pi}{4}\tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

所以本题应填 $\frac{\pi}{4}$。

(11)设 $z=f(\ln x+\frac{1}{y})$，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________。

**解**：本题要求的是 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}$，只需求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$，然后代入 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}$ 中就可以了。

先来求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

由于 $z=f(\ln x+\frac{1}{y})$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\ln x+\frac{1}{y})\times\frac{1}{x}$。

再来求 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

由于 $z=f(\ln x+\frac{1}{y})$，所以 $\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\ln x+\frac{1}{y})\times(-\frac{1}{y^2})$。

代入 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}$ 中，得

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x\times f'(\ln x+\frac{1}{y})\times\frac{1}{x}+y^2\times f'(\ln x+\frac{1}{y})\times(-\frac{1}{y^2}) \tag{1}$$

$x\times f'(\ln x+\frac{1}{y})\times\frac{1}{x}+y^2\times f'(\ln x+\frac{1}{y})\times(-\frac{1}{y^2})$ 可以化简为

$$x\times f'(\ln x+\frac{1}{y})\times\frac{1}{x}+y^2\times f'(\ln x+\frac{1}{y})\times(-\frac{1}{y^2})=f'(\ln x+\frac{1}{y})-f'(\ln x+\frac{1}{y}) \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\ln x+\frac{1}{y})-f'(\ln x+\frac{1}{y})=0 \tag{3}$$

所以本题应填0。

(12)微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$ ________。

**解**：微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 可以整理为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{x}{y}=3y$，这明显是一个可以用公式法来求解的一阶微分方程。

由公式法可知,该一阶微分方程的通解为 $x = \mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int 3y\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right] = y^2 + \frac{C}{y}$。

下面要确定 $C$。已知 $y|_{x=1} = 1$,把 $x = 1$、$y = 1$ 代入 $x = y^2 + \frac{C}{y}$ 中,解得 $C = 0$,所以有 $x = y^2$。

本题是一道填空题,明确规定了最后的答案要写为"$y =$"的形式,所以需要把 $x = y^2$ 转化为"$y =$"的形式。

$x = y^2$ 很明显可以转化为 $y = \pm\sqrt{x}$,但当 $x = 1$ 时 $y = 1$,所以把 $y = -\sqrt{x}$ 舍弃,取 $y = \sqrt{x}$。

本题应填 $\sqrt{x}$。

(13)曲线 $y = x^2 + x(x < 0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________。

**解**:要想解答本题,就必须知道曲率的计算公式:$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$。

由于 $y = x^2 + x$,所以 $y' = 2x + 1$,$y'' = 2$。把 $y' = 2x + 1$,$y'' = 2$ 代入曲率的计算公式中,得

$$K = \frac{2}{[1 + (2x + 1)^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

已知

$$K = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合,得

$$\frac{2}{[1 + (2x + 1)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{3}$$

由(3)式可以解得 $x = 0$ 或 $x = -1$,已知 $x < 0$,所以 $x = -1$。

现在求出的 $x = -1$ 只是横坐标,那么纵坐标该怎么求呢?把 $x = -1$ 代入 $y = x^2 + x$ 中,解得 $y = 0$。所以坐标为 $(-1, 0)$。

本题应填 $(-1, 0)$。

(14)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}| = 3$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $|\boldsymbol{BA}^*| =$ ________。

**解**:由于矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵(都是 3 阶方阵),所以有

$$|\boldsymbol{BA}^*| = |\boldsymbol{B}| \times |\boldsymbol{A}^*| \tag{1}$$

$\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行交换得到的，所以有

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}| \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$|\boldsymbol{BA}^*| = -|\boldsymbol{A}| \times |\boldsymbol{A}^*| \tag{3}$$

在线性代数中，有公式 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$。本题中，由于 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，所以 $n = 3$，可得

$$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^2 \tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$|\boldsymbol{BA}^*| = -|\boldsymbol{A}| \times |A|^2 \tag{5}$$

(5)式可以化简为

$$|\boldsymbol{BA}^*| = -|\boldsymbol{A}|^3 \tag{6}$$

已知

$$|\boldsymbol{A}| = 3 \tag{7}$$

将(7)式代入(6)式，得

$$|\boldsymbol{BA}^*| = -27 \tag{8}$$

所以本题应填 $-27$。

## 三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \dfrac{1+x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$，记 $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

(Ⅰ)求 $a$ 的值；

(Ⅱ)若当 $x \to 0$ 时，$f(x) - a$ 与 $x^k$ 是同阶无穷小，求常数 $k$ 的值。

**解**：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

已知

$$a = \lim_{x\to 0} f(x) \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$a = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) \tag{3}$$

(3)式通分得

$$a = \lim_{x\to 0}\frac{x + x^2 - \sin x}{x\sin x} \tag{4}$$

当 $x\to 0$ 时, $\sin x$ 和 $x$ 是等价无穷小, 所以(4)式可以变为

$$a = \lim_{x\to 0}\frac{x + x^2 - \sin x}{x^2} \tag{5}$$

(5)式可以拆为

$$a = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^2} = 1 - \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^2} \tag{6}$$

对 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^2}$ 使用洛必达法则, 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{2x} \tag{7}$$

(6)式、(7)式相结合, 得

$$a = 1 - \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{2x} \tag{8}$$

当 $x\to 0$ 时, $1 - \cos x$ 和 $\frac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小, 所以(8)式可以变为

$$a = 1 - \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x} = 1 - \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{2} = 1 - 0 = 1 \tag{9}$$

再来看第(Ⅱ)问。

由于 $f(x) = \frac{1 + x}{\sin x} - \frac{1}{x}$ 且 $a = 1$, 所以 $f(x) - a = \frac{1 + x}{\sin x} - \frac{1}{x} - 1$, 整理得 $f(x) - a = \frac{x + x^2 - \sin x - x\sin x}{x\sin x}$。所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - a}{x^k}$ 为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - a}{x^k} = \frac{\frac{x + x^2 - \sin x - x\sin x}{x\sin x}}{x^k} \tag{10}$$

当 $x\to 0$ 时, $\sin x$ 和 $x$ 是等价无穷小, 所以(10)式可以变为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - a}{x^k} = \frac{\frac{x + x^2 - \sin x - x\sin x}{x^2}}{x^k} \tag{11}$$

(11)式可以整理为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - a}{x^k} = \frac{x + x^2 - \sin x - x\sin x}{x^{k+2}} \tag{12}$$

对(12)式使用洛必达法则, 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - a}{x^k} = \frac{1 + 2x - \cos x - \sin x - x\cos x}{(k + 2)x^{k+1}} \tag{13}$$

对(13)式使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a}{x^k}=\frac{2+\sin x-2\cos x+x\sin x}{(k+2)(k+1)x^k} \tag{14}$$

对(14)式使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+3\sin x+x\cos x}{(k+2)(k+1)kx^{k-1}} \tag{15}$$

已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 $x^k$ 是同阶无穷小，这也就意味着 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+3\sin x+x\cos x}{(k+2)(k+1)kx^{k-1}}$ 等于一个非零的数，由此可知 $k=1$。

（16）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值。

**解：**本题是一道非常常规的题目，求的是二元函数的极值，可以按照求二元函数的极值的方法解答。

第一步：求出二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域。

本题中，很明显定义域是“$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$”。

第二步：求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

由于 $z=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

第三步：求三种点。即 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 成立的点、$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 没有定义的点、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 没有定义的点。

先求第一种点。

令 $\begin{cases}(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\\ -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\end{cases}$，一共解出两个点，分别是 $(1,0)$，$(-1,0)$。

再求第二种点。

由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，在定义域“$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$”上 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 处处有定义，所以没有第二种点。

再求第三种点。

由于 $\frac{\partial z}{\partial y}=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，在定义域“$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$”上$\frac{\partial z}{\partial y}$处处有定义，所以没有第三种点。

综上所述，第三步一共求出两个点，分别是$(1,0)$，$(-1,0)$。

第四步:求出$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left((1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right)}{\partial x}=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left((1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right)}{\partial y}=(x^2-1)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right)}{\partial y}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

第五步:对于第三步求出的每一个点$(x_0,y_0)$，计算$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$、$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$、$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$。记$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}=A$，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=B$，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}=C$。

若$AC-B^2>2$，说明点$(x_0,y_0)$是极值点。并且有：当$A>0$时$(x_0,y_0)$是极小值点，当$A<0$时$(x_0,y_0)$是极大值点。

若$AC-B^2<0$，说明$(x_0,y_0)$不是极值点。

若$AC-B^2=0$，说明$(x_0,y_0)$有可能是极值点也有可能不是极值点，还须另作讨论。

先来验证点$(1,0)$。由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(x^2-1)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

所以

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=-2e^{-\frac{1}{2}}$，即$A=-2e^{-\frac{1}{2}}$。

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=0$，即$B=0$。

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}\right|_{(1,0)} = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\text{即 } C = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}。$$

由于 $AC - B^2 = 2\mathrm{e}^{-1} > 0$，说明点(1,0)是极值点。又因为 $A = -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} < 0$，所以点(1,0)是极大值点。

再来验证点（-1，0）。由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (x^3 - 3x)\mathrm{e}^{-\frac{x2+y2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (x^2 - 1)y\mathrm{e}^{-\frac{x2+y2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(y^2 - 1)\mathrm{e}^{-\frac{x2+y2}{2}}$$

所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,0)} = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\text{即 } A = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}。$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(-1,0)} = 0,\text{即 } B = 0。$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}\right|_{(-1,0)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\text{即 } C = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}。$$

由于 $AC - B^2 = 2\mathrm{e}^{-1} > 0$，说明点（-1，0）是极值点。又因为 $A = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} > 0$，所以点（-1，0）是极小值点。

第六步：对第五步找出的每个极值点计算各自的极值。

本题中，第五步一共找出两个极值点，分别是极大值点(1,0)和极小值点（-1，0）。

现在就针对这两个极值点计算极值。

由于本题中二元函数是 $f(x, y) = x\mathrm{e}^{-\frac{x2+y2}{2}}$，所以极大值点(1,0)所对应的极大值为 $f(1, 0) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，极小值点（-1，0）所对应的极小值为 $f(-1, 0) = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$。

本题解答完毕。

(17)（本题满分 10 分）

过点（0，1）作曲线 $L$：$y = \ln x$ 的切线，切点为 $A$，又 $L$ 与 $x$ 轴交于 $B$ 点，区域 $D$ 由 $L$ 与直线 $AB$ 围成，求区域 $D$ 的面积及 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积。

**解：**本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

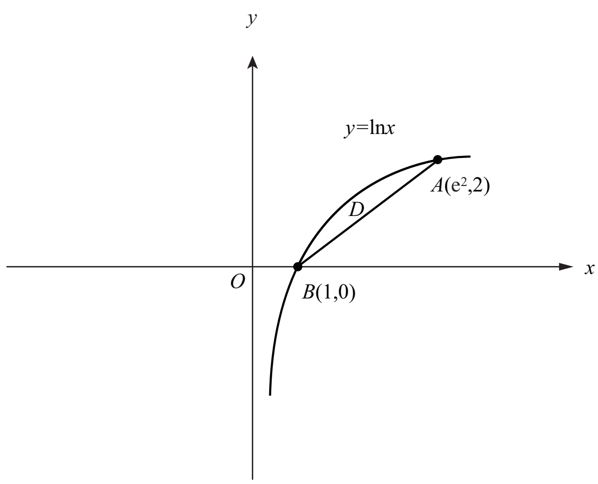
首先求出切点 $A$ 的坐标。设 $A$ 的坐标为 $(x_1, y_1)$，则曲线 $y = \ln x$ 在 $A$ 点的切线方程为 $y - y_1 = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_1}(x - x_1)$，而 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_1} = \frac{1}{x_1}$（因为 $y = \ln x$），所以曲线 $y = \ln x$ 在 $A$ 点的切线

方程为 $y - y_1 = \dfrac{1}{x_1}(x - x_1)$。

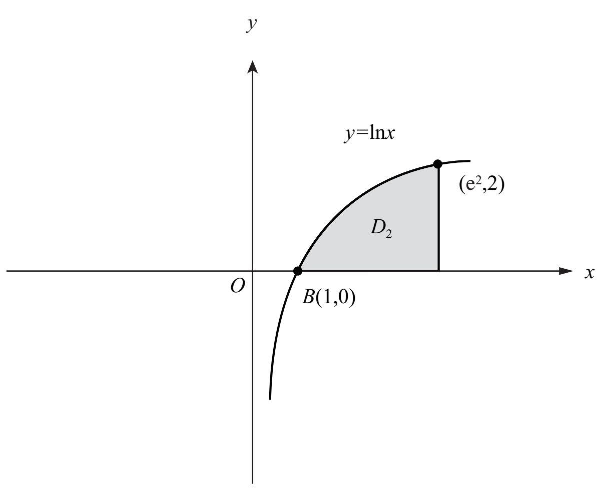
现在已经求出了曲线 $y = \ln x$ 在 $A$ 点的切线方程，已知这条切线过点 $(0,1)$，所以将 $x=0, y=1$ 代入 $y - y_1 = \dfrac{1}{x_1}(x - x_1)$ 中，解得 $x_1 = e^2, y_1 = 2$。

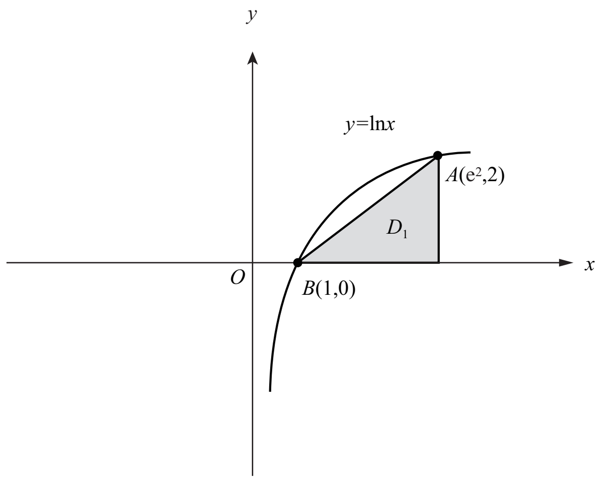
再来求 $B$ 点的坐标。已知 $y = \ln x$ 与 $x$ 轴交于 $B$ 点，所以 $B$ 点的坐标为 $(1,0)$。

已知区域 $D$ 由 $y = \ln x$ 与直线 $AB$ 围成，先在平面直角坐标系中画出区域 $D$，如下图所示。




由上图可知，区域 $D$ 的面积很明显等于区域 $D_2$ 的面积减去区域 $D_1$ 的面积(其中区域 $D_2$ 和区域 $D_1$ 如下图所示)。






先来计算区域 $D_2$ 的面积，区域 $D_2$ 是一个不规则的图形，所以采用定积分来计算其面积，区域 $D_2$ 的面积为 $S_2$ 为

$$S_2 = \int_1^{e^2} (\ln x - 0)\,\mathrm{d}x = e^2 + 1$$

再来计算区域 $D_1$ 的面积，区域 $D_1$ 是一个直角三角形，所以采用三角形面积公式来计算其面积，区域 $D_1$ 的面积 $S_1$ 为

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 底 \times 高 = \frac{1}{2} \times (e^2 - 1) \times 2 = e^2 - 1$$

所以区域 $D$ 的面积 $S$ 为

$$S = S_2 - S_1 = e^2 + 1 - (e^2 - 1) = 2$$

再来看第(Ⅱ)问。

区域 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V$ 很明显等于区域 $D_2$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V_2$ 减去区域 $D_1$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V_1$。

先来计算区域 $D_2$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V_2$。根据旋转体体积公式可知，$V_2 = \int_1^{e^2} \pi \ln^2 x\,\mathrm{d}x$。

再来算区域 $D_1$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V_1$。由于区域 $D_1$ 是一个三角形，所以它绕 $x$ 轴旋转一周后得到的是一个规则图形，即圆锥。根据圆锥体积公式可知，$V_1$ 为 $V_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times (e^2 - 1)$。

所以区域 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V = V_2 - V_1 = \int_1^{e^2} \pi \ln^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times (e^2 - 1) = \frac{2\pi}{3}(e^2 - 1)$$

(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$,其中区域 $D$ 由曲线 $r = 1 + \cos\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 与极轴围成。

**解**:本题要求计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$。我们知道,二重积分或者用直角坐标系法计算,或者用极坐标系法计算。区域 $D$ 由曲线 $r = 1 + \cos\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 与极轴围成,所以应该用极坐标系法来计算该二重积分。

解答过程共有四步:一是确定 $\theta$ 的积分上、下限,二是确定 $r$ 的积分上、下限,三是利用 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ 替换被积函数(别忘了被积函数中还需乘以 $r$),四是计算。

先来确定 $\theta$ 的积分上、下限。由于 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$,所以 $\theta$ 的积分下限为 0,上限为 $\pi$。

再来确定 $r$ 的积分上、下限。由于 $r = 1 + \cos\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$,所以 $r$ 的积分下限为 0,上限为 $1 + \cos\theta$。

再来确定被积函数。将被积函数中的 $x$ 换成 $r\cos\theta$,$y$ 换成 $r\sin\theta$,再在被积函数中乘以 $r$,则被积函数为 $r^3\cos\theta\sin\theta$。

最后是计算。通过前三步,有 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta} r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r$。通过计算可知,$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta} r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r = \dfrac{16}{15}$。

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2\mathrm{e}^x$。

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的表达式。

(Ⅱ)求曲线 $y = f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点。

**解**:本题有两问,先来看第(Ⅰ)问。

函数 $f(x)$ 满足两个方程,一个是 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$,另一个是 $f''(x) + f(x) = 2\mathrm{e}^x$,现在要求函数 $f(x)$。

解题思路应该是:先求出二阶常系数齐次线性微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的通解,通解中肯定含两个任意常数 $C_1$ 和 $C_2$(因为 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 是二阶微分方程,所以通解中肯定是含有两个任意常数),然后再利用 $f''(x) + f(x) = 2\mathrm{e}^x$ 确定两个任意常数。

首先按照求二阶常系数齐次线性微分方程通解的方法来求 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的通解。

第一步:先把 $y''$ 的系数变为 1, 即变为 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$, 记 $p=\frac{B}{A}$, $q=\frac{C}{A}$。

对于 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ , 已经是 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$ 的形式了, 所以不用再变了。其中 $p=1$, $q=-2$。

第二步:解方程 $r^2+pr+q=0$。

对于 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ , 相应的特征方程是 $r^2+r-2=0$

解得 $r_1=1$, $r_2=-2$。

第三步:写出通解。

情况 1. 若第二步解出的 $r_1$、$r_2$ 为实根并且 $r_1\neq r_2$, 则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$。

情况 2. 若第二步解出的 $r_1$、$r_2$ 为实根并且 $r_1=r_2$, 则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$。

情况 3. 若第二步解出的 $r_1$、$r_2$ 为复数根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, 则通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$。

本题中, 由于 $r_1=1$, $r_2=-2$, 属于情况 1, 所以 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$。

接下来要通过方程 $f''(x)+f(x)=2e^x$ 确定 $C_1$ 和 $C_2$, 具体方法如下:

由于 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$, 所以

$f'(x)=C_1e^x-2C_2e^{-2x}$

$f''(x)=C_1e^x+4C_2e^{-2x}$

将 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$、$f''(x)=C_1e^x+4C_2e^{-2x}$ 代入 $f''(x)+f(x)$ 中, 得 $f''(x)+f(x)=2C_1e^x+5C_2e^{-2x}$, 已知 $f''(x)+f(x)=2e^x$, 由此可得 $2C_1e^x+5C_2e^{-2x}=2e^x$。

解得 $C_1=1$, $C_2=0$。

所以 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}=e^x$

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt$ 的拐点。下面按照求某函数的拐点的方法来解答。

按照六步来做。

第一步: 写出该函数的定义域。

本题中, 函数 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$。

第二步: 求两种点, 即二阶导数为 0 的点和二阶导没有定义的点。

先求二阶导数为 0 的点。

首先要求二阶导数。由于 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt$, 所以 $y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1$, $y''=$

$2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x$。然后令二阶导数为 0，即

$$2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x=0$$

解得 $x=0$。

所以二阶导数为 0 的点一共只有一个，即 $x=0$。

再来求二阶导没有定义的点。

二阶导数是 $y''=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x$，在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上存在没有定义的点吗？很明显不存在！

也就是说不存在二阶导没有定义的点。

第三步：用求出的二阶导数为 0 的点和二阶导没有定义的点划分定义域。

本题中，就是用 $x=0$ 划分定义域 $(-\infty,+\infty)$，可以划分为两个区域：$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是方便计算），然后代入二阶导函数中，根据二阶导函数大于 0 还是小于 0 确定凹凸性。

在区间 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 内任取一个点代入二阶导函数 $y''=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x$ 中，发现小于 0，所以函数 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是凸的。

在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个点代入二阶导函数 $y''=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x$ 中，发现大于 0，所以函数 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的。

第五步：拐点肯定是取自二阶导数为 0 的点或者二阶导没有定义的点。具体来说，就是看每个二阶导数为 0 的点和二阶导没有定义的点的两侧的区域的凹凸性。“左凹右凸”或“左凸右凹”是拐点，“同凹同凸”则不是拐点。

本题中，情况如下：

| | | |
|---|---|---|
| $(-\infty,0)$ | 0 | $(0,+\infty)$ |

来看 $x=0$ 这个点。第四步已经判断出它左侧的区间 $(-\infty,0)$ 是凸的，右侧的区间 $(0,+\infty)$ 是凹的，$x=0$ 属于“左凸右凹”，所以是一个拐点（横坐标）。

第六步：前面计算出的其实是拐点的横坐标，现在要把拐点的横坐标代入函数 $f(x)$ 中，计算出拐点。

本题中，将 $x=0$ 代入 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 中，解得 $y(0)=0$。

所以点 $(0,0)$ 是函数 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 的拐点。

（20）（本题满分 11 分）

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$。

**解：** 本题属于"证明不等式"的题型。首先来总结一下证明不等式的方法。

方法 1。

方法 1 的适用题型是：要证明的不等式的形式是 □ < □ < □ 并且三个方框全是常数。

第一步：设一个辅助函数 $f(x)$，将三个方框中的中间的方框里的常数变成 $x$。

第二步：把要证明的不等式改写为 □ < □ − 0 < □。

第三步：找到使得 $f(a)=0$ 的 $a$，把 □ < □ − 0 < □ 再改写为 □ < □ − $f(a)$ < □。

第四步：在区间［$a$，中间方框中的常数］上使用拉格朗日中值定理即可得证。

方法 2。

方法 2 的适用题型是：让证明的不等式的形式是 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>$ 某常数 或 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<$ 某常数。

第一步：找出使得 $f(a)=0$ 和 $g(a)=0$ 的常数 $a$，然后把要证明的不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>$ 某常数 改写为 $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}>$ 某常数（或把不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<$ 某常数 改写为 $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}<$ 某常数）

第二步：在区间 $[a,x]$ 上对函数 $f(x)$、$g(x)$ 使用柯西中值定理即可得证。

方法 3。

方法 3 是考研数学中最常用到的"证明不等式"的方法。其适用题型是：要证明的不等式的形式是 □ < Δ（或 □ > Δ 或 □ ⩽ Δ 或 □ ⩾ Δ），并且 □ 和 Δ 都不是常数。

第一步：设辅助函数 $F(x)$ = □ − Δ 或 $F(x)$ = Δ − □。

第二步：对辅助函数 $F(x)$ 求导、求导、再求导……求到几阶导为止呢？如果遇到以下两种情况之一，就不用再求了。

情况 1：当求到某阶导函数后，在所给的区间上该导函数恒正或恒负。

情况 2：当求到某阶导函数后，可以在所给的区间上找到一个点，在（所给的区间的左端点，该点）上该导函数恒正（或恒负），在（该点，所给的区间的右端点）上该导函数恒负（或恒正）。

第三步：一阶一阶往回推，通过高阶导函数的正负推出低阶导函数的增减性，再通过端点的函数值或者第二步中找到的某点的函数值推出低阶导函数的正负……这样一阶一阶往回推，直到推出 $F(x)>0$ 或 $F(x)<0$ 为止。

方法 4。

方法 4 的适用题型是：要证明的不等式的形式是 □ ⩽ □ ⩽ □，并且最左侧的 □ 和最

右侧的 □ 都是常数，而中间的方框是函数。

只要按求最值的方法求出中间那个函数的最小值是左边的常数，最大值是右边的常数即可。

方法5。

方法5的适用题型是：要证明的不等式的形式是 □ > Δ 或 □ < Δ，并且 □ 和 Δ 都是常数，并且设一个辅助函数 $f(x)$ 后要证明的不等式可表示为 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 或 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

如果最终要证明的不等式是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那只要算出 $f''(x)>0$ 即可。这是因为：$f''(x)>0$ 说明函数图形是凹的，而凹函数的定义是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

如果最终要证明的不等式是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那只要算出 $f''(x)<0$ 即可。这是因为：$f''(x)<0$ 说明函数图形是凸的，而凸函数的定义是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

以上总结了证明不等式的五种方法以及什么时候该用什么方法，现在正式来看本题。

由于本题要证明的不等式的形式是 □ ≥ Δ 并且 □ 和 Δ 都不是常数，所以属于方法3的适用题型，所以就按照方法3来解答。

第一步：设辅助函数。

由于本题要证明的不等式是 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$，所以设辅助函数为 $F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$。这样最终只需要证明在区间 $(-1<x<1)$ 上，$F(x)\geq 0$。

第二步：连续求导。

由于设的辅助函数是 $F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，所以

$$\begin{aligned}F'(x)&=\ln\frac{1+x}{1-x}+x(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})-\sin x-x\\&=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\sin x-x\end{aligned}$$

此时能够判断出函数 $F'(x)$ 在区间 $(-1<x<1)$ 上的正负吗？明显不能，所以继续求导。

$$F''(x)=\frac{4}{1-x^2}+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}-1-\cos x$$

此时能够判断出函数 $F''(x)$ 在区间 $(-1<x<1)$ 上的正负吗？能！具体来说：在区间 $(-1<x<1)$ 上，$F''(x)>0$。所以就求到二阶导为止。

第三步：一阶一阶往回推(利用高阶的正负性推低阶的增减性)。

本题中，由于在区间 $(-1<x<1)$ 上 $F''(x)>0$，所以在区间 $(-1<x<1)$ 上 $F'(x)$ 单调递增。

由于 $F'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\sin x-x$，所以 $F'(0)=0$。前面已经证明了区间 $(-1<x<1)$ 上 $F'(x)$ 单调递增，所以有：在区间 $(-1,0)$ 上 $F'(x)<0$，在区间 $(0,1)$ 上 $F'(x)>0$。下面分两段来讨论。

第一段：当 $x$ 在区间 $(-1,0)$ 上时，由于 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 单调递减。而由于 $F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，所以 $F(0)=0$。函数 $F(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 的右端点处的函数值是 0，在区间 $(-1,0)$ 上是单调递减的，所以必有：在区间 $(-1,0)$ 上，$F(x)>0$。

第二段：当 $x$ 在区间 $(0,1)$ 上时，由于 $F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 单调递增。而由于 $F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，所以 $F(0)=0$。函数 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 的左端点处的函数值是 0，而且函数 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是单调递增的，所以必有：在区间 $(0,1)$ 上，$F(x)>0$。

综上所述，在区间 $(-1,0)$、$(0,1)$ 上都有 $F(x)>0$，又由于 $F(0)=0$，所以有：在区间 $(-1<x<1)$ 上，$F(x)\geqslant 0$。本题证明完毕。

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ ($n$ 为大于 1 的整数)在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

(Ⅱ)记(Ⅰ)中的实根为 $x_n$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限。

**解**：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

设函数 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1(n>1)$，最终只需要证明函数 $f(x)=0$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个零点即可。

先来计算 $f(\frac{1}{2})$。

由于 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1(n>1)$，所以

$$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{2})^{n-1}+\cdots+(\frac{1}{2})-1\xlongequal[\text{列求和公式}]{\text{根据等比数}}\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-1=-\frac{1}{2^n}<0$$

再来计算$f(1)$。

由于$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1(n>1)$，所以

$f(1)=n-1>0$

综上所述，有$f(\frac{1}{2})<0,f(1)>0$。在闭区间$[\frac{1}{2},1]$上使用介值定理，即可知：$f(x)=0$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有零点。

如果到这里就认为第(Ⅰ)问已经证明完毕，那就大错特错了。因为现在只是证明了“有实根”，而第(Ⅰ)问要求证明的是“有且仅有一个实根”。也就是说，现在只证明了存在性，还没有证明唯一性。下面继续证明唯一性。

当$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，由于$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1(n>1)$，所以

$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0$

既然$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时$f'(x)>0$，这就说明在$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时$f(x)$单调递增。

综上所述，由于$f(x)$是单调的，并且$f(x)=0$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有实根，所以$f(x)=0$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根。

再来看第(Ⅱ)问。

先来证明极限存在。证明极限存在的方法一般是采用“单调有界法”。具体来说，或者是单调递增且有上界，或者是单调递减且有下界。

有界证明如下。

因为记(Ⅰ)中的实根为$x_n$，而(Ⅰ)中的实根范围是区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以有$\frac{1}{2}<x_n<1$。所以数列$\{x_n\}$既有上界又有下界。

单调证明如下。

已知$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$，而$x_n$是方程的实根，所以有

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1 \tag{1}$$

把(1)式中的$n$换成$n+1$，得

$$x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}=1 \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1} \tag{3}$$

由于$x_{n+1}$是在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$中的，而且$n$大于1，必然有$x_{n+1}^{n+1}>0$。所以(3)式可以变为

$$x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = \text{一个大于 0 的数} + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n-1} + \cdots + x_{n+1} \tag{4}$$

由(4)式立刻可得

$$x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n > x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n-1} + \cdots + x_{n+1} \tag{5}$$

由(5)式立刻可知 $x_n > x_{n+1}$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减。

综上所述，由于数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界，所以数列 $\{x_n\}$ 的极限存在。

再来求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

由于 $x_n$ 是方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 的实根，所以有

$$x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1 \tag{6}$$

由等比数列求和公式得

$$x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = \frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} \tag{7}$$

(6)式、(7)式相结合，得

$$\frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1 \tag{8}$$

将(8)式的等式左右两侧取极限，得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = \lim_{n\to\infty} 1 \tag{9}$$

将(9)式化简得

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 0}{1 - \lim\limits_{n\to\infty} x_n} = 1 \tag{10}$$

注：之所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{n+1} = 0$，是因为 $x_n$ 属于区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$。

由(10)式可以解得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$。

(22)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

（Ⅰ）计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

（Ⅱ）当实数 $a$ 为何值时，方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X} = \vec{\beta}$ 有无穷多解，并求其通解。

**解：**本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

第(Ⅰ)问是计算行列式 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$。可采用降阶法(按行列展开法)来计算该行列式,这里选取第 1 列来降阶(实际上,选取任意一行或任意一列来进行降阶都可以)。即

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + a \times (-1)^{4+1} \times \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= 1 - a^4$$

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问问的是当实数 $a$ 为何值时,方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X} = \vec{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解。这里先来复习一下克拉默法则的推论,其实就是以下四个充分必要条件:

齐次方程组

①系数行列式 $D = 0 \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有无穷多组解(非唯一解)(非零解)。

②系数行列式 $D \neq 0 \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有唯一零解。

非齐次方程组

③系数行列式 $D = 0 \Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有无穷多组解(非唯一解)或无解。

④系数行列式 $D \neq 0 \Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有唯一解。

根据③可知:当 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 时,非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X} = \vec{\beta}$ 有无穷多组解(非唯一解)或无解。

第(Ⅰ)问已经算出了 $|\boldsymbol{A}| = 1 - a^4$,所以当 $1 - a^4 = 0$ 即 $a = \pm 1$ 时,非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X} = \vec{\beta}$ 有无穷多组解(非唯一解)或无解。

那么 $a = \pm 1$ 就是本题的答案吗?当然不是。因为本题说的是"有无穷多组解",而 $a = \pm 1$ 时方程组有无穷多组解或无解。所以接下来要验证 $a = -1$、$a = 1$ 这两者中究竟哪个对应的是无解或有无穷多组解。

当 $a = 1$ 时:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix},\ \vec{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$，则矩阵 $(\boldsymbol{A} \mid \vec{\beta})=$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$，采用初等行变换化为阶梯形矩阵 $$\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$$，由此可知

$r(\boldsymbol{A})=3$，$r(\boldsymbol{A} \mid \vec{\beta})=4$，由于这两个秩不相等，所以非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{\beta}$ 无解。

当 $a=-1$ 时：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{pmatrix},\ \vec{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$，则矩阵 $(A \mid \vec{\beta})=$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$，采用初等行变换化为阶梯形矩阵 $$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$，

由此可知 $r(\boldsymbol{A})=3$，$r(\boldsymbol{A} \mid \vec{\beta})=3$，由于这两个秩相等，所以非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{\beta}$ 有解。加之 $r<n$，所以非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{\beta}$ 有无穷多组解。

接下来求通解。

先来复习一下求非齐次方程组通解的步骤：

(1) 写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩 $r_1$、$r_2$。

(2) 判断解的类型。

① 若 $r_1 \neq r_2$，则该非齐次方程组无解。

② 若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2=n$（未知数个数），则该非齐次方程组有唯一的解，不用再进行步骤(3)了。

③ 若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2<n$（未知数个数），则该非齐次方程组有无穷多解，需要进行步骤(3)。

(3) 先当成对应的齐次方程组，按齐次方程组的步骤(3)求出齐次方程组的通解。

然后再还原成非齐次方程组，令自由未知数取全零，求出非齐次方程组的一个特解。最后，用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解，得到的就是非齐次方程组的通解。

按照这三个步骤就可以求出在 $a=-1$ 的条件下，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{\beta}$ 的通解。在这里公布一下答案：在 $a=-1$ 的条件下，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{\beta}$ 的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，其中 $k$ 为任意常数。

(23)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\vec{x}$ 的秩为 2。

(Ⅰ)求实数 $a$ 的值；

(Ⅱ)求正交变换 $\vec{x}=\boldsymbol{Q}\vec{y}$ 将 $f$ 化为标准形。

**解**：先来看第(Ⅰ)问。

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\vec{x}$ 的秩为 2。二次型的秩是指二次型的对应矩阵的秩。对于本题，意思是二次型的对应矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，即 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$。

并且，$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$。

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，将其化为阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}$，由 $r(\boldsymbol{A})=2$ 可知 $a+1=0$，解得 $a=-1$。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是将二次型化为标准形。将二次型化为标准形有两种方法，一是正交变换法，二是配方法。不过题中指定了用正交变换法。

二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\vec{x}$ 的对应矩阵为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$。

先求矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值。

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

令 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0$，即

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得：$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 6$。

再求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个不同特征值所对应的特征向量。

当 $\lambda_1 = 0$ 时：

齐次方程组 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\vec{\xi} = \vec{0}$ 变为 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\vec{\xi} = \vec{0}$。解出方程组 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\vec{\xi} = \vec{0}$ 的通解即可，但不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

最终解得特征值 0 对应的特征向量为 $C_1\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 $C_1$ 是不为零的任意常数。

当 $\lambda_2=2$ 时：

齐次方程组 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$。解出方程组 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 的通解即可，不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

解得特征值 2 对应的特征向量为 $\boldsymbol{C}_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{C}_2$ 是不为零的任意常数。

当 $\lambda_3=6$ 时：

齐次方程组 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$。解出方程组 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 的通解即可，不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

解得特征值 6 对应的特征向量为 $\boldsymbol{C}_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{C}_3$ 是不为零的任意常数。

记 $\overrightarrow{a_1}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{a_2}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{a_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，现在需要将 $\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$ 单位正交化。“单位正交化”是指：先正交化，后单位化。

正交化过程如下。

由于矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$ 是实对称矩阵，而实对称矩阵来自不同特征值的特征向量本来就是正交的，所以“正交化”这个环节不用进行了。

单位化过程如下。

$$\overrightarrow{b_1}=\frac{\overrightarrow{a_1}}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b_2}=\frac{\overrightarrow{a_2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b_3}=\frac{\overrightarrow{a_3}}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{b_1}$，$\overrightarrow{b_2}$，$\overrightarrow{b_3}$ 即为单位化后所得的向量。

设 $\boldsymbol{Q}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，令 $\vec{x}=\boldsymbol{Q}\vec{y}$，则原二次型所对应的标准形为 $2y_2{}^2+6y_3{}^2$。

这道题就解答完了。其实，如果只想求出原二次型化成的标准形，那很容易，当求出矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的三个特征值是 0、2、6 之后，就知道原二次型化成的标准形了。然而，这道题并不是“只要写出标准形就行了”，而是“要求出矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得：若令 $\vec{x}=\boldsymbol{Q}\vec{y}$，则原二次型能变为标准形”。

# 2011年全国硕士研究生入学统一考试试题及精解

## 一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1)已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 $cx^k$ 是等价无穷小，则(　　)。

(A) $k=1, c=4$　　(B) $k=1, c=-4$

(C) $k=3, c=4$　　(D) $k=3, c=-4$

**解**：先来计算一下 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^k}$。

由于 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^k} \tag{1}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}x^k=0$，$\lim\limits_{x\to 0}(3\sin x-\sin 3x)=0$，所以可以对 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{x^k}$ 使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{kx^{k-1}} \tag{2}$$

(2)式可以整理为

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^k}=\frac{3}{k}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^{k-1}} \tag{3}$$

(1)式、(3)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}=\frac{3}{k}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^{k-1}} \tag{4}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}x^{k-1}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\cos 3x)=0$，所以可以对 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^{k-1}}$ 使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^{k-1}}=\frac{1}{k-1}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x-\sin x}{x^{k-2}} \tag{5}$$

(4)式、(5)式相结合，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^k} = \frac{3}{k(k-1)} \lim_{x \to 0} \frac{3\sin 3x - \sin x}{x^{k-2}} \tag{6}$$

由于 $\lim\limits_{x \to 0} x^{k-2} = 0$，$\lim\limits_{x \to 0}(3\sin 3x - \sin x) = 0$，所以可以对 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin 3x - \sin x}{x^{k-2}}$ 使用洛必达法则，即

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\sin 3x - \sin x}{x^{k-2}} = \frac{1}{k-2} \lim_{x \to 0} \frac{9\cos 3x - \cos x}{x^{k-3}} \tag{7}$$

(6)式、(7)式相结合，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^k} = \frac{3}{k(k-1)(k-2)} \lim_{x \to 0} \frac{9\cos 3x - \cos x}{x^{k-3}} \tag{8}$$

由(8)式可知

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{3}{3(3-1)(3-2)} \lim_{x \to 0} \frac{9\cos 3x - \cos x}{x^{3-3}} = 4 \tag{9}$$

在该式的等式左右两侧同时乘以 $\dfrac{1}{4}$ 得：

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{4x^3} = 1 \tag{10}$$

已知当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 $cx^k$ 是等价无穷小，即

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{cx^k} = 1 \tag{11}$$

(10)式、(11)式对比立刻可知 $k = 3$、$c = 4$，所以本题应该选择(C)选项。

(2)设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，且 $f(0) = 0$，则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = ($　　$)$。

(A) $-2f'(0)$　　　　(B) $-f'(0)$

(C) $f'(0)$　　　　(D) 0

**解：** 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，这说明 $f'(0)$ 存在。先写出函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的定义式，即 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$。由于 $f(0) = 0$，所以有

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) \tag{1}$$

再来计算 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^3)}{x^3}$。

令 $t = x^3$，则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^3)}{x^3}$ 可以变为

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} \tag{2}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$，所以必然有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(t)}{t}=f'(0) \tag{3}$$

(2)式、(3)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}=f'(0) \tag{4}$$

本题的问题 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}$ 可以写为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3} \tag{5}$$

把(1)式、(4)式代入(5)式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=f'(0)-2f'(0) \tag{6}$$

(6)式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=-f'(0) \tag{7}$$

所以本题应该选择(B)选项。

(3)函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为(　　)。

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

**解**：本题求的是驻点个数，驻点是指一阶导函数为 0 的点，所以首先要求出一阶导函数。

已知 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$，所以有以下两种情况。

情况 1：当 $(x-1)(x-2)(x-3)<0$ 时，$f(x)=\ln[-(x-1)(x-2)(x-3)]$。

情况 2：当 $(x-1)(x-2)(x-3)>0$ 时，$f(x)=\ln[(x-1)(x-2)(x-3)]$。

情况 1 时求导函数的方法如下：

由于 $f(x)=\ln[-(x-1)(x-2)(x-3)]$，所以

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{-[(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)]}{-(x-1)(x-2)(x-3)}\\&=\frac{(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\\&=\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}\end{aligned}$$

情况 2 时求导函数的方法如下：

由于 $f(x)=\ln[(x-1)(x-2)(x-3)]$，所以

$$f'(x)=\frac{(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

无论是情况1还是情况2，都有：$f'(x)=\dfrac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$。

下面只需令一阶导函数为0，就可以求出驻点。

令 $\dfrac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}=0$，解得 $x_1=\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}$，$x_2=\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}$。

所以驻点一共有两个，本题应该选择(C)选项。

(4)微分方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为(　　)。

(A) $a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$　　(B) $ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$

(C) $x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$　　(D) $x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$

**解：**微分方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}$ 是一个二阶常系数非齐次线性微分方程，本题没有要求求出特解，只是问特解的形式而已。

本题的解题思路很简单，将微分方程拆为 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}$ 和 $y''-\lambda^2y=e^{-\lambda x}$，然后分别求出 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}$ 和 $y''-\lambda^2y=e^{-\lambda x}$ 的特解形式，再加起来就可以了。

先求微分方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}$ 的特解形式。

将等式右侧的 $e^{\lambda x}$ 改写为 $1\times e^{\lambda x}$。

我们知道，如果等式右侧是 $P_n(x)\times e^{\lambda x}$（其中 $P_n(x)$ 为 $n$ 次多项式），就可以设特解为 $y^*=x^k\times H_n(x)\times e^{\lambda x}$（其中 $H_n(x)$ 为 $n$ 次多项式，即和 $P_n(x)$ 的次数一样）。

所以对于 $y''-\lambda^2y=1\times e^{\lambda x}$，应该设其特解为 $y^*=a\times x^k\times e^{\lambda x}$。接下来只需要确定出 $k$ 即可。

非齐次微分方程 $y''-\lambda^2y=1\times e^{\lambda x}$ 所对应的齐次微分方程是 $y''-\lambda^2y=0$，其特征方程为 $r^2-\lambda^2=0$，解得 $r_1=\lambda$，$r_2=-\lambda$。

由于 $\lambda$ 是 $r_1$ 和 $r_2$ 的其中一个，所以 $k=1$，$y''-\lambda^2y=1\times e^{\lambda x}$ 的特解形式为 $y^*=axe^{\lambda x}$。

再来求微分方程 $y''-\lambda^2y=e^{-\lambda x}$ 的特解形式。

同理，对于 $y''-\lambda^2y=1\times e^{-\lambda x}$，设其特解为 $y^*=b\times x^k\times e^{-\lambda x}$。接下来只需要确定出 $k$ 即可。

非齐次微分方程 $y''-\lambda^2y=1\times e^{-\lambda x}$ 所对应的齐次微分方程是 $y''-\lambda^2y=0$，其特征方程为 $r^2-\lambda^2=0$，解得 $r_1=\lambda$，$r_2=-\lambda$。

由于 $-\lambda$ 是 $r_1$ 和 $r_2$ 的其中一个，所以 $k=1$，$y''-\lambda^2y=1\times e^{-\lambda x}$ 的特解形式为 $y^*=bxe^{-\lambda x}$。

由此可得，微分方程 $y''-\lambda^2 y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}$ 的特解形式为 $y^*=axe^{\lambda x}+bxe^{-\lambda x}$，本题应该选择(C)选项。

(5)设函数 $f(x)$、$g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0$，$g(0)<0$，且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　)。

(A) $f''(0)<0, g''(0)>0$　　(B) $f''(0)<0, g''(0)<0$

(C) $f''(0)>0, g''(0)>0$　　(D) $f''(0)>0, g''(0)<0$

**解：**本题是一道很常规的题目，利用多元函数求极值的方法解答就行了。具体来说，如果在点 $(0,0)$ 处的 $AC-B^2>0$ 并且 $A>0$，那么函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处就取得极小值。所以现在就是要看(A)、(B)、(C)、(D)四个选项中的哪一项能够推出 $AC-B^2>0$ 并且 $A>0$。

先求 $A$、$B$、$C$。

由于 $z=f(x)g(y)$，所以有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y)$$

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=f''(0)g(0)$$

$$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=f'(0)\times g'(0)=0$$

$$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=f(0)\times g''(0)$$

$$AC-B^2=f''(0)\times g(0)\times f(0)\times g''(0)$$

现在要同时保证 $AC-B^2>0$ 和 $A>0$，同时保证 $f''(0)\times g(0)\times f(0)\times g''(0)>0$ 和 $f''(0)g(0)>0$。

很明显在(A)、(B)、(C)、(D)四个选项中，只有(A)选项能同时保证 $f''(0)\times g(0)\times f(0)\times g''(0)>0$ 和 $f''(0)g(0)>0$，所以本题选择(A)选项。

(6)设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}ln cot x\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}ln cos x\mathrm{d}x$，则 $I$、$J$、$K$ 的大小关系为(　　)。

(A) $I<J<K$　　(B) $I<K<J$

(C) $J<I<K$　　(D) $K<J<I$

**解：**本题所给的三个积分的上下限都是一样的(下限都是 0，上限都是 $\frac{\pi}{4}$)，所以只需

比较被积函数的大小，被积函数的大小顺序就是积分值的大小顺序。

对数函数 $y = \ln x$ 在其定义域 $(0, +\infty)$ 内是单调递增函数。也就是说，$x$ 越大，$\ln x$ 就越大。

然后，有一个常识大家必须知道：当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时，$\sin x < \cos x < \cot x$。

所以有如下不等式成立：

$\ln\sin x < \ln\cos x < \ln\cot x$

由此可知，三个积分值的大小顺序是 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x \mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x \mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x \mathrm{d}x$，即 $I < K < J$。本题选择(B)选项。

(7)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵。记 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A} = ($　　$)$。

(A) $P_1P_2$　　　　(B) $P_1^{-1}P_2$

(C) $P_2P_1$　　　　(D) $P_2P_1^{-1}$

**解**：先写出单位矩阵 $\boldsymbol{E}$：

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

已知交换 $B$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，所以只要把单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的第 2 行与第 3 行交换，就得到了 $\boldsymbol{B}$。

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

又已知将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列与第 1 列相加得矩阵 $\boldsymbol{B}$，所以用矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的第 1 列减去第 2 列，就得到了 $\boldsymbol{A}$。$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1-0 & 0 & 0 \\ 0-0 & 0 & 1 \\ 0-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

现在来验证一下(A)、(B)、(C)、(D)四个选项到底哪个正确。

需要注意的是，(B)选项和(D)选项中出现了符号“$-1$”，也就是求逆矩阵。由于矩阵 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 都是初等矩阵(单位矩阵只经过一次初等变换后所形成的矩阵)，所以在求矩阵 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 的逆矩阵时，可以直接按照初等矩阵的逆矩阵求法来求，而不用按照常规矩阵求逆矩阵的方法，这样可以使得计算简单一些。

计算过程此处省略，本题选择(D)选项。

(8)设 $\boldsymbol{A}=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)$ 是4阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系可为(　　)。

(A) $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_3$　　(B) $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$

(C) $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$　　(D) $\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$

**解**：已知齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{0}$ 的一个基础解系是 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，这说明齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系中只含有一个向量。

对于齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{0}$ 而言，“基础解系中所含向量的个数”等于“未知数的个数 $n$”减去“矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r$”。

对于本题而言，有 $n-r(\boldsymbol{A})=1$。显然 $n=4$(因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有4列)，所以可以解得 $r(\boldsymbol{A})=3$。

下面要告诉大家一个结论(这个结论并不是针对本题而言的，而是一个通用的结论)：

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n$ 行 $n$ 列的方阵，则有

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & \text{若 } r(\boldsymbol{A})=n \\ 1, & \text{若 } r(\boldsymbol{A})=n-1 \\ 0, & \text{若 } r(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$$

对于本题，显然是“$r(\boldsymbol{A})=n-1$ ($r(\boldsymbol{A})$ 和 $n-1$ 都是3)”，所以有 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$。

既然 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，齐次方程组 $\boldsymbol{A}^*\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系中就含有3个向量(因为 $n-r(\boldsymbol{A}^*)=4-1=3$)。那么(A)选项和(B)选项就被排除掉了。

接下来需要从(C)选项和(D)选项中选择一个正确的选项。

已知 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{0}$ 的一个基础解系，则 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{0}$ 的解。于是有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{0}。$$

又已知$\boldsymbol{A}=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4})$，所以有

$$(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4})\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$$

展开得：

$$1\overrightarrow{\alpha_1}+0\overrightarrow{\alpha_2}+1\overrightarrow{\alpha_3}+0\overrightarrow{\alpha_4}=\vec{0}$$

化简得：

$$1\overrightarrow{\alpha_1}+1\overrightarrow{\alpha_3}=\vec{0}$$

那么$\overrightarrow{\alpha_1}$和$\overrightarrow{\alpha_3}$这两个向量是线性相关的还是线性无关的？当然是线性相关的。为何？因为根据线性相/无关的定义可知，对于$k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_3}=\vec{0}$而言，如果存在不全为0的数$k_1$、$k_2$，使得$k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_3}=\vec{0}$成立，那么就称$\overrightarrow{\alpha_1}$和$\overrightarrow{\alpha_3}$是线性相关的。

现在已经求出了$1\overrightarrow{\alpha_1}+1\overrightarrow{\alpha_3}=\vec{0}$，也就是说，当$k_1=1$，$k_2=1$时，$k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_3}=\vec{0}$成立。所以，$\overrightarrow{\alpha_1}$和$\overrightarrow{\alpha_3}$这两个向量是线性相关的。

既然$\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$是线性相关的，那么$\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$是线性相关的还是线性无关的？当然也是线性相关的。这就是著名的定理“少相关则多相关(若原向量组线性相关，则当增加一个向量后，无论增加的是什么向量，新向量组也线性相关)”。

现在已经判断出了$\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$是线性相关的，而基础解系中的向量必须是线性无关的，所以(C)选项不能选。

综上所述，本题应该选择(D)选项。

## 二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________。

**解：** 先来计算极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+2^x}{2}$：

$$\lim_{x\to0}\frac{1+2^x}{2}=\frac{1+2^0}{2}=1$$

再来计算极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$：

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$$

所以本题属于 $1^{\infty}$ 型的函数极限计算题。

$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln\left(\frac{1+2x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2x}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2x}{2}\right)}$

只需算出 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)$ 就可以了。

现在来计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)$。

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)}{x}\tag{1}$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)}{x}$ 可以写为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{1+2^x}{2}-1\right)}{x}\tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{1+2^x}{2}-1\right)}{x}\tag{3}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+2^x}{2}-1\right)=0$，根据等价无穷小可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{1+2^x}{2}-1\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1+2^x}{2}-1}{x}\tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1+2^x}{2}-1}{x}\tag{5}$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1+2^x}{2}-1}{x}$ 可以整理为

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1+2^x}{2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}\tag{6}$$

(5)式、(6)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}\tag{7}$$

根据等价无穷小替换原则，可以将 $2^x-1$ 替换为 $x\ln2$，即

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln2}{2x} \tag{8}$$

(7)式、(8)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x\ln2}{2x}=\frac{\ln2}{2} \tag{9}$$

所以 $e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2x}{2}\right)}=e^{\frac{\ln2}{2}}=e^{\frac{1}{2}\ln2}=e^{\ln2^{\frac{1}{2}}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$。

所以本题应填 $\sqrt{2}$。

(10)微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$ ________。

**解**：本题是求一阶微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 的特解。我们知道，要想求特解，需要先求通解。所以要解答本题，需要分两个步骤。

第一个步骤：求出微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 的通解。

第二个步骤：结合初始条件 $y(0)=0$，求出微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 的特解。

先来进行第一个步骤，即求出微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 的通解。

对于一阶微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$，求通解有公式：

$$y=e^{\int-p(x)dx}\left[\int q(x)\times e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

本题所给的一阶微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 很显然就是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的形式(其中 $p(x)=1$，$q(x)=e^{-x}\cos x$ )。所以直接套公式求通解即可。即

$$\begin{aligned}y&=e^{\int-1dx}\left[\int e^{-x}\cos x\times e^{\int1dx}dx+C\right]\\&=e^{-x}\left[\int e^{-x}\cos x\times e^{x}dx+C\right]\\&=e^{-x}\left[\int\cos x dx+C\right]\\&=e^{-x}[\sin x+C]\end{aligned}$$

再来进行第二个步骤，即结合初始条件 $y(0)=0$，求出微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 的特解。

将 $y(0)=0$ 代入到 $y=e^{-x}[\sin x+C]$ 中，得

$0=e^{-0}[\sin0+C]$

解得 $C=0$。

所以一阶微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=e^{-x}\sin x$。

(11)曲线 $y=\int_0^x\tan t dt\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$ ________。

**解**：为了方便表示，记曲线 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$ 为曲线 $L$。

大家应该知道：当第一类曲线积分的被积函数为 1 时，积分值就是积分区域的弧长。所以，只需算出 $\int_L 1\mathrm{d}s$ 就可以了。

计算过程如下。

我们知道，第一类曲线积分中的"$\mathrm{d}s$"或者转换为"$\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$"，或者转换为"$\sqrt{1+x'^2}\mathrm{d}y$"，由于本题所给的曲线是 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t$，所以应该将"$\mathrm{d}s$"转换为"$\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$"：

$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x$

那么积分上下限呢？由于 $0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4}$，所以显然积分下限是 0，积分上限是 $\dfrac{\pi}{4}$。

综上所述，有

$$\begin{aligned}
\int_L 1\mathrm{d}s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\mathrm{d}x \\
&= \ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \ln\left|\sec\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}\right|-\ln|\sec 0+\tan 0| \\
&= \ln\left|\sqrt{2}+1\right|-\ln 1 \\
&= \ln(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

综上所述，本题答案为 $\ln(\sqrt{2}+1)$。

(12)设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，$\lambda>0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=$ ________。

**解**：$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 很明显可以写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

由于 $f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，所以应该将 $\int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 显化为 0，将

$\int_{0}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 显化为 $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$，所以(1)式可以变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x \times 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x \times \lambda \times \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \tag{2}$$

(2)式可以化简为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x \times \lambda \times \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \tag{3}$$

由分部积分公式可以计算出

$$\int_{0}^{+\infty} x \times \lambda \times \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

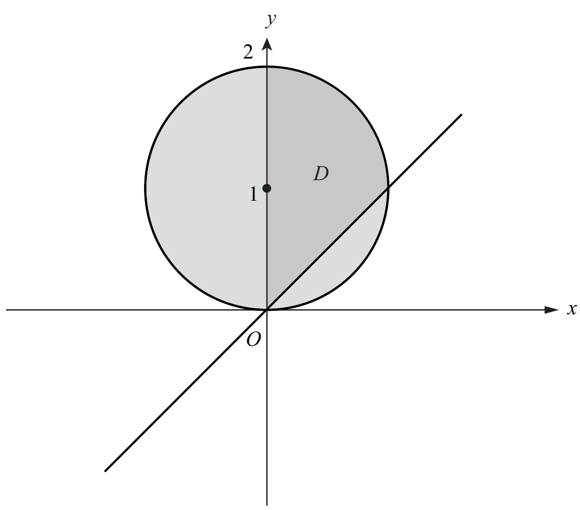
(3)式、(4)式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \tag{5}$$

所以本题应填 $\frac{1}{\lambda}$。

(13)设平面区域 $D$ 由直线 $y = x$，圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 $y$ 轴所围成，则二重积分 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}\sigma =$ ________。

**解**：首先，在平面直角坐标系中画出积分区域 $D$，如下图所示。




由于积分区域 $D$ 并不是圆或半圆，所以本题应该采用直角坐标系法(而不是极坐标系法)来计算。

再具体地说，应该使用直角坐标系法中的先 $y$ 后 $x$ 法来计算(内层是对 $y$ 积分，外层是

对 $x$ 积分)。

首先，确定外层积分 $x$ 的上下限。由于阴影区域中横坐标的最大小值分别是 1 和 0，所以积分上限是 1，积分下限是 0。

然后，确定内层积分 $y$ 的上下限。画一条与 $y$ 轴平行且与阴影区域相交的直线，虽然有很多种画法，但无论哪种画法，这条直线总与阴影区域的边界交于两个点。其中，纵坐标小的点总是在线 $y = x$ 上，纵坐标大的点总是在线 $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ 上。所以积分上限是 $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$，积分下限是 $x$。

由此可得

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} xy\mathrm{d}y \tag{1}$$

通过计算可知

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} xy\mathrm{d}y = \frac{7}{12} \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma = \frac{7}{12} \tag{3}$$

所以本题应填 $\frac{7}{12}$。

(14)二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$，则 $f$ 的正惯性指数为________。

**解**：本题问的是正惯性指数，无论“正惯性指数”还是“负惯性指数”，都是针对“标准形”而言的，而本题所给的二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 明显只是一个普通的二次型(并不是标准形)，所以首先要将这个普通的二次型化为标准形。

化二次型为标准形一共有两种方法：一是正交变换法，二是配方法。这里不妨采用配方法。

经配方后，原二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 变为 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2$。令 $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$，$y_2 = x_2$，则有 $y_1^2 + 2y_2^2$。

可知正惯性指数为 2。

所以本题应填 2。

## 三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha}}$。设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，试求 $\alpha$ 的取值范围。

**解**：由于 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha}}$，所以可知当 $\alpha\leqslant0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$（因为当 $\alpha\leqslant0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha}}$ 属于 $\infty\times\infty$）。而已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，这说明 $\alpha$ 不能小于等于 0，所以判断出 $\alpha>0$。

由于 $\alpha>0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的函数极限，可以使用洛必达法则，即

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$。可知当 $0<\alpha\leqslant1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$（因为当 $0<\alpha\leqslant1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$ 属于 $\infty\times\infty$）。而已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，说明 $\alpha$ 不能处于 $0<\alpha\leqslant1$ 区域，所以将前面判断出的 $\alpha>0$ 缩小为 $\alpha>1$。

由于 $\alpha>1$，所以有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}F(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}(1+x^2)}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha}(\dfrac{1}{x^2}+1)}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}(\dfrac{1}{x^2}+1)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2}{\infty}$$

$$= 0$$

这与已知的 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 一致，说明 $\alpha>1$ 不需要再缩小范围了。

那么 $\alpha>1$ 就是本题的答案吗？当然不是。这时可能有些同学会感到奇怪：不是刚才说不用再缩小范围了吗？

其实，刚才说不用缩小范围了，指的是从题中所给的 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 推出的 $\alpha>1$，这个范围的确是不用再缩小了。可是，题中不但说 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，还有 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，而 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$ 这个条件现在还没有用上，所以 $\alpha>1$ 并不是本题的最后答案，我们还需要利用题中所说的 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$ 来继续解答。

由于 $\alpha>1$，所以有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}F(x) &= \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^\alpha}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}\\ &= \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{x^{\alpha-1}}\\ &= \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to0^+}x^{3-\alpha}\end{aligned}$$

由此可得出如下结论：

当 $\alpha<3$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$

当 $\alpha=3$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\frac{1}{3}$

当 $\alpha>3$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=+\infty$

已知 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，所以立刻有 $\alpha<3$。

所以本题的答案为 $1<\alpha<3$。

(16)(本题满分 11 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3}\end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点。

**解**：本题一共有三问，第一问是求 $y = y(x)$ 的极值，第二问是求 $y = y(x)$ 的凹凸区间，第三问是求 $y = y(x)$ 的拐点。

先来看第一问。

先按照求极值的方法来解答。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题而言，定义域是 $x \in (-\infty, +\infty)$。

第二步：求两种点，即驻点和不可导点。

要想求驻点，先要求一阶导数。由于 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 + t + \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{3}t^3 - t + \dfrac{1}{3} \end{cases}$，所以 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \times \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \times \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$。令一阶导数为 0，即

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0$$

解得 $t = 1, t = -1$。

由于 $x = \dfrac{1}{3}t^3 + t + \dfrac{1}{3}$，所以 $t = 1, t = -1$ 所对应的 $x$ 值分别是 $x = \dfrac{5}{3}, x = -1$。

于是驻点一共有两个，即 $x = \dfrac{5}{3}, x = -1$。

再来求不可导点。

一阶导数是 $y' = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$，在第一步求得的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上 $y'$ 存在没有定义的点吗？并不存在。所以没有不可导点。

第三步：用求出的驻点和不可导点划分定义域。

第二步求出的驻点和不可导点总共有两个（其中驻点两个，不可导点零个），用这两个点 $x = \dfrac{5}{3}, x = -1$ 划分定义域 $(-\infty, +\infty)$，可以划分为三个区域：$(-\infty, -1)$，$(-1, \dfrac{5}{3})$，$(\dfrac{5}{3}, +\infty)$。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好算），代入导函数中，根据导函数大于 0 还是小于 0 确定单调性。

对于本题而言，在区间 $(-\infty, -1)$ 内任取一个点 $x = -\dfrac{13}{3}$（对应 $t = -2$），然后将 $t = -2$ 代入导函数 $y' = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ 中，解得 $y' = \dfrac{3}{5}$。由于 $y' > 0$，所以函数 $y = y(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调递增。

在区间 $\left(-1,\frac{5}{3}\right)$ 内任取一个点 $x=\frac{1}{3}$（对应 $t=0$），然后将 $t=0$ 代入导函数 $y'=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ 中，解得 $y'=-1$。由于 $y'<0$，所以函数 $y=y(x)$ 在区间 $\left(-1,\frac{5}{3}\right)$ 上单调递减。

在区间 $\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$ 内任取一个点 $x=5$（对应 $t=2$），然后将 $t=2$ 代入导函数 $y'=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ 中，解得 $y'=\frac{3}{5}$。由于 $y'>0$，所以函数 $y=y(x)$ 在区间 $\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$ 上单调递增。

第五步：极值点肯定是取自驻点或者不可导点。具体来说，就是看每个驻点和不可导点的两侧的区域的单调性。“左增右减”是极大值点，“左减右增”是极小值点，“同增同减”则不是极值点。

对于本题而言，有如下情况：

$(-\infty,-1)$　　$-1$　　$\left(-1,\frac{5}{3}\right)$　　$\frac{5}{3}$　　$\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$

先来看 $x=-1$ 这个点。第四步已经判断出它左侧的区间 $(-\infty,-1)$ 是单调递增区间，右侧的区间 $\left(-1,\frac{5}{3}\right)$ 是单调递减区间，所以 $x=-1$ 属于“左增右减”，是一个极大值点。

再来看 $\frac{5}{3}$ 这个点。第四步已经判断出它左侧的区间 $\left(-1,\frac{5}{3}\right)$ 是单调递减区间，右侧的区间 $\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$ 是单调递增区间，所以 $x=\frac{5}{3}$ 属于“左减右增”，是一个极小值点。

第六步：将求得的极值点代入函数中，算出函数值，即极值。

极大值点 $x=-1$（对应 $t=-1$）处的极大值为 $y=\frac{1}{3}\times(-1)^3-(-1)+\frac{1}{3}=1$。

极小值点 $x=\frac{5}{3}$（对应 $t=1$）处的极小值为 $y=\frac{1}{3}\times 1^3-1+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$。

再来看第二问。

按照求求凹凸区间的方法解答。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题，定义域是 $x\in(-\infty,+\infty)$。

第二步：求两种点，即二阶导数为 0 的点和二阶导没有定义的点。

要想求二阶导数为 0 的点，先要求二阶导数。由于 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3}\end{cases}$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\times\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$，所以 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{4t}{(t^2+1)^3}$。

令二阶导数为0，即

$$\frac{4t}{(t^2+1)^3}=0$$

解得 $t=0$。

由于 $x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}$，所以 $t=0$ 所对应的 $x$ 值是 $x=\frac{1}{3}$。

于是二阶导数为0的点只有一个，即 $x=\frac{1}{3}$。

再来求二阶导数没有定义的点。

二阶导数是 $\frac{4t}{(t^2+1)^3}$，很明显并不存在没有定义的点。

第三步：用求出的二阶导数为0的点和二阶导没有定义的点划分定义域。

第二步求出的二阶导数为0的点和没有定义的点总共只有一个所以就用这个点 $x=\frac{1}{3}$ 划分定义域 $(-\infty,+\infty)$。可以划分为两个区域：$(-\infty,\frac{1}{3})$，$(\frac{1}{3},+\infty)$。

第四步：每个区间内任取一个点(取点的原则是方便计算)，代入二阶导函数中，根据二阶导函数大于0还是小于0确定凹凸性。

在区间 $(-\infty,\frac{1}{3})$ 内任取一个点 $x=-1$（对应 $t=-1$），然后将 $t=-1$ 代入二阶导函数 $\frac{4t}{(t^2+1)^3}$ 中，解得 $y''=-\frac{1}{2}$。由于 $y''<0$，所以函数 $y=y(x)$ 在区间 $(-\infty,\frac{1}{3})$ 上是凸的。

在区间 $(\frac{1}{3},+\infty)$ 内任取一个点 $x=\frac{5}{3}$（对应 $t=1$），然后将 $x=\frac{5}{3}$ 代入二阶导函数 $\frac{4t}{(t^2+1)^3}$ 中，解得 $y''=\frac{1}{2}$。由于 $y''>0$，所以函数 $y=y(x)$ 在区间 $(\frac{1}{3},+\infty)$ 上是凹的。

最后来看第三问。

求拐点的方法如下。

第一步：写出该函数的定义域。

第二步：求两种点，第一种点是二阶导数为0的点，第二种点是二阶导没有定义的点。

第三步：用求出的二阶导数为0的点和二阶导没有定义的点划分定义域。

第四步：每个区间内任取一个点(取点的原则是好算)，代入二阶导函数中，根据二阶导函数大于0还是小于0确定凹凸性。

第五步：拐点肯定是取自二阶导数为0的点或者二阶导没有定义的点。具体来说，就是看每个二阶导数为0的点和二阶导没有定义的点的两侧的区域的凹凸性。“左凹右凸”或

“左凸右凹”是拐点，“同凹同凸”则不是拐点。

第六步：前面算出的其实是拐点的横坐标，下面将拐点的横坐标代入函数 $f(x)$ 中，计算出拐点。

求拐点的六个步骤中前四步正是求凹凸区间的四个步骤，所以现在只需要进行第五步和第六步就可以了。

第五步：拐点肯定是取自二阶导数为 0 的点或者二阶导没有定义的点。具体来说，就是看每个二阶导数为 0 的点和二阶导没有定义的点的两侧的区域的凹凸性。“左凹右凸”或“左凸右凹”是拐点，“同凹同凸”则不是拐点。

对于本题而言，情况如下：

$(-\infty, \frac{1}{3})$　　　　$\frac{1}{3}$　　　　$(\frac{1}{3}, +\infty)$

来看 $x=\frac{1}{3}$ 这个点。第四步已经判断出它左侧的区间 $(-\infty, \frac{1}{3})$ 是凸的，右侧的区间 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 是凹的，所以 $x=\frac{1}{3}$ 属于“左凸右凹”，是一个拐点(横坐标)。

第六步：前面计算出的其实是拐点的横坐标，下面将拐点的横坐标代入函数 $f(x)$ 中，计算出拐点。

对于本题，将前面计算出的 $x=\frac{1}{3}$（对应 $t=0$）代入 $y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3}$ 中，解得 $y=\frac{1}{3}$。

所以点 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 就是函数 $y=y(x)$ 的拐点。

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $z=f(xy, yg(x))$，其中函数 $f$ 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$。求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$。

**解**：可能有一些同学看不懂问题“求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$”，先给大家解释一下。“求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$”指的就是“求 $\left.\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$”。

具体的计算过程要分四步。

第一步：求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

第二步：求出 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}$。

第三步：求出 $\dfrac{\mathrm{d}\left(\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)}{\mathrm{d}y}$。注意：为什么是“d”而不是“$\partial$”了呢？这是因为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}$ 中已经不含有 $x$ 了，只含有 $y$。

第四步：求出 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\left(\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}$。注意：求出的 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\left(\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}$ 就是 $\left.\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$。

先进行第一步，即求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

已知 $z=f(xy,\ yg(x))$，设 $u=xy$，$v=yg(x)$，则 $z=f(u,\ v)$。

由于 $z=f(u,\ v)$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1{}'\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2{}'\dfrac{\partial v}{\partial x}$。

由于 $u=xy$，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y$。

由于 $v=yg(x)$，所以 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=yg'(x)$。

由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=yg'(x)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1{}'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2{}'\frac{\partial v}{\partial x}=f_1{}'\cdot y+f_2{}'\cdot yg'(x)$$

再进行第二步，即求出 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}$。

由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1{}'\cdot y+f_2{}'\cdot yg'(x)$，

所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f_1{}'\cdot y+f_2{}'\cdot yg'(1)$。

函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，这说明 $x=1$ 是函数 $g(x)$ 的极值点。大家都知道，极值点或者是一阶导数为 0 的点，或者是不可导点。已知函数 $g(x)$ 可导，这说明函数 $g(x)$ 在整个定义域内都可导，所以函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处肯定可导，$x=1$ 并不是函数 $g(x)$ 的不可导点，而是函数 $g(x)$ 的一阶导数为 0 的点。所以有 $g'(1)=0$。

由于 $g'(1)=0$，所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f_1{}'\cdot y+f_2{}'\cdot yg'(1)=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f_1{}'\cdot y$。

第二步（计算 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}$）到这里就结束了吗？并没有。我们还可以再具体一些。先要告诉大家一句话：函数法则对函数法则后面的括号里的变量求导的结果仍然是函数法则后面的括号里的变量的函数。

再来看本题，大家都知道“$f_1'$”指的是“$\frac{\partial f}{\partial u}$”。由于 $z=f(u,v)$，所以“$\frac{\partial f}{\partial u}$”正是“函数法则 $f$ 对函数法则 $f$ 后面的括号里的变量求导”，所以求导结果仍然是函数法则 $f$ 后面的括号里的变量的函数，即 $f_1'=f_1'(u,v)$。

所以可以将 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f_1'\cdot y$ 更具体地写为 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f_1'\cdot y=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f_1'(u,v)\cdot y$。

由于 $u=xy$，所以当 $x=1$ 时，$u=y$。

由于 $v=yg(x)$，，所以当 $x=1$ 时，$v=yg(1)$。已知 $g(1)=1$，所以 $v=y$。

综上所述，由于当 $x=1$ 时，$u=y$，$v=y$，所以可以将 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f_1'(u,v)\cdot y$ 更具体地写为 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f_1'(y,y)\cdot y$。

再进行第三步，即求出 $\frac{\mathrm{d}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)}{\mathrm{d}y}$。

由于 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f_1'(y,y)\cdot y$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}(f_1'(y,y)\cdot y)}{\mathrm{d}y}=[f''_{11}(y,y)+f''_{12}(y,y)]y+1\cdot f_1'(y,y)$$

最后进行第四步，即求出 $\left.\frac{\mathrm{d}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}$。

由于 $\frac{\mathrm{d}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)}{\mathrm{d}y}=[f''_{11}(y,y)+f''_{12}(y,y)]y+1\cdot f_1'(y,y)$，

所以 $\left.\frac{\mathrm{d}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}=f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1)+1\cdot f_1'(1,1)$。

所以本题的答案为 $f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1)+1\cdot f_1'(1,1)$。

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点。记 $\alpha$ 为曲线 $l$ 在点 $(x,y)$ 处切线的倾角，若 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，求 $y(x)$ 的表达式。

**解**：已知

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

我们知道，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$表示的是$y$对$x$求导。其几何意义是切线斜率，所以有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha \tag{2}$$

注意：(2)式并不是仅针对本题的，而是针对所有题的。

将(2)式的等式左右两侧对$x$求导，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} \tag{3}$$

有的同学可能不明白为何$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$后面乘以$\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$，这其实很好理解，因为曲线$l$在点$(x,y)$处切线的倾角$\alpha$肯定是$x$的函数。

(3)式可以整理为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\sec^2\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} \tag{4}$$

(4)式可以进一步整理为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(1+\tan^2\alpha)\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} \tag{5}$$

由于$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha$，所以(5)式可以变为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} \tag{6}$$

(1)式、(6)式相结合，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{7}$$

令$P=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则(7)式变为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=(1+P^2)P \tag{8}$$

将(8)式变形为

$$1\mathrm{d}x=\frac{1}{P(1+P^2)}\mathrm{d}P \tag{9}$$

(9)式可以进一步变形为

$$1\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{P}-\frac{P}{1+P^2}\right)\mathrm{d}P \tag{10}$$

将(10)式的等式左右两侧积分，立刻可得

$x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{P^2}{1+P^2}+C_1$

已知曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点，这意味着这两条线在点 $x=0$ 处的切线斜率相等，直线 $y=x$ 在点 $x=0$ 处的切线斜率很明显是1(其实直线 $y=x$ 在任意一点处的切线斜率都是1)，所以曲线 $l$ 在点 $x=0$ 处的切线斜率也是1，于是有 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1$。前面设 $P=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以当 $x=0$ 时，$P=1$。

将 $x=0$，$P=1$ 代入 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{P^2}{1+P^2}+C_1$ 中，解得 $C_1=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$。

将解得的 $C_1=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$ 代入 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{P^2}{1+P^2}+C_1$ 中，可得

$$\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}\ln\frac{P^2}{1+P^2}+C_1\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{P^2}{1+P^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}(\ln\frac{P^2}{1+P^2}-\ln\frac{1}{2})\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{P^2}{1+P^2}}{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{2P^2}{1+P^2}\end{aligned}$$

由 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{2P^2}{1+P^2}$ 可以解出 $P=\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2-\mathrm{e}^{2x}}}$，由于设 $P=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2-\mathrm{e}^{2x}}}$。

对 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2-\mathrm{e}^{2x}}}$ 的等式两侧积分，得 $y=\arcsin\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}+C_2$。

曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点，这暗示了曲线 $l$ 是过原点的，所以当 $x=0$ 时，$y=0$。

将 $x=0$，$y=0$ 代入 $y=\arcsin\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}+C_2$ 中，解得 $C_2=-\frac{\pi}{4}$，所以 $y(x)$ 的表达式为 $y=\arcsin\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$。

(19)(本题满分11分)

(Ⅰ)证明：对任意的正整数 $n$，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立。

(Ⅱ)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

**解**：先来看第(Ⅰ)问。

本题属于“证明不等式”的问题。下面先来给大家总结一下“证明不等式”的解题方法。

方法 1——拉格朗日中值定理法。

方法 1 的适用题型是：要求证明的不等式的形式是 $\square < \square < \square$ 并且这三个方框中都不含 $x$。

第一步：设一个辅助函数 $f(x)$。怎么设呢？将三个方框中的中间的那个方框里的数变成 $x$ 即可。

第二步：将要求证明的不等式改写为 $\square < \square - 0 < \square$。

第三步：找到使 $f(a) = 0$ 的 $a$，把 $\square < \square - 0 < \square$ 再改写为 $\square < \square - f(a) < \square$。

第四步：在区间 $[a$，中间那个方框中的数$]$ 上使用拉格朗日中值定理即可得证。

方法 2——柯西中值定理法。

方法 2 的适用题型是：要求证明的不等式的形式是 $\dfrac{f(x)}{g(x)} >$ 某常数或 $\dfrac{f(x)}{g(x)} <$ 某常数。

第一步：找出使得 $f(a) = 0$ 和 $g(a) = 0$ 的常数 $a$，然后把要求证明的不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)} >$ 某常数 改写为 $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} >$ 某常数（或将不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)} <$ 某常数 改写为 $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} <$ 某常数）

第二步：在区间 $[a, x]$ 上对函数 $f(x)$、$g(x)$ 使用柯西中值定理即可得证。

方法 3——连续求导法。

方法 3 是研究生数学考试中最常用到的“证明不等式”的方法，它的适用题型是：要求证明的不等式的形式是 $\square < \Delta$(或 $\square > \Delta$ 或 $\square \leqslant \Delta$ 或 $\square \geqslant \Delta$)，并且 $\square$ 和 $\Delta$ 中都含有 $x$。

第一步：设辅助函数 $F(x) = \square - \Delta$ 或 $F(x) = \Delta - \square$。

第二步：对辅助函数 $F(x)$ 求导、求导、再求导……求到几阶导为止呢？如果遇到以下两种情况之一，那就不用再求了。

情况 1：当求到某阶导函数后，在题中所给的区间上该导函数恒正或恒负。

情况 2：当求到某阶导函数后，可以在题中所给的区间上找到一个点，在（题中所给的区间的左端点，该点）上该导函数恒正(或恒负)，在（该点，题中所给的区间的右端点）上该导函数恒负(或恒正)。

第三步：一阶一阶地往回推，通过高阶导函数的正负推出低阶导函数的增减性，再通过端点的函数值或者第二步中找到的那个点的函数值推出低阶导函数的正负……就这样一阶一阶地往回推，直到推出 $F(x) > 0$ 或 $F(x) < 0$ 为止。

方法 4——最值法。

方法 4 的适用题型是：要求证明的不等式的形式是 $\square < \square < \square$，并且最左侧的 $\square$ 和最右侧的 $\square$ 都不含 $x$ 而中间的 $\square$ 含 $x$。

只要求出中间那个函数的最小值是左边的□，最大值是右边的□即可。

方法5——凹凸性法。

方法5的适用题型是：要求证明的不等式的形式是□ > Δ或□ < Δ，并且□和Δ都是常数，并且设一个辅助函数$f(x)$后要求证明的不等式可表示为$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$或$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

如果最终要证明的不等式是$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么只要计算出$f''(x) > 0$即可了。

如果最终要证明的不等式是$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么只要算出$f''(x) < 0$即可了。

“证明不等式”的问题的解题方法就是这些。

对于本题而言，由于要求证明的不等式的形式是□ < □ < □并且这三个方框中都没有出现$x$，所以应该用“方法1——拉格朗日中值定理法”来证明。

下面就按照方法1的四个步骤来解答。

第一步：设一个辅助函数$f(x)$。怎么设呢？将三个方框中的中间的那个方框里的数变成$x$即可。

本题中间的方框是“$\ln(1+\frac{1}{n})$”，里面的数是“$1+\frac{1}{n}$”，变成$x$，则辅助函数为$y=\ln x$。

第二步：将要求证明的不等式改写为□ < □ − 0 < □。

本题要求证明的不等式是$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$，所以将其改写为$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) - 0 < \frac{1}{n}$。

第三步：找到使得$f(a)=0$的$a$，把□ < □ − 0 < □再改写为□ < □ − $f(a)$ < □。

第一步已经设辅助函数$f(x)=\ln x$，由于$\ln 1 = 0$，所以将不等式$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) - 0 < \frac{1}{n}$改写为$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln 1 < \frac{1}{n}$。

第四步：在区间[$a$，中间那个方框中的数]上使用拉格朗日中值定理即可得证。

对于本题，$a=1$，中间那个方框中的数是$1+\frac{1}{n}$，所以在区间$[1, 1+\frac{1}{n}]$上使用拉格朗日中值定理。

由于函数$f(x)=\ln x$在$[1,1+\frac{1}{n}]$上连续，在$(1,1+\frac{1}{n})$上可导，根据拉格朗日中值定理，有$\frac{f(1+\frac{1}{n})-f(1)}{1+\frac{1}{n}-1}=f'(\xi)$，其中$\xi\in(1,1+\frac{1}{n})$。

将$\frac{f(1+\frac{1}{n})-f(1)}{1+\frac{1}{n}-1}=f'(\xi)$整理得$\frac{\ln(1+\frac{1}{n})-\ln 1}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\xi}$，再整理可得$\ln(1+\frac{1}{n})-\ln 1=\frac{1}{n\xi}$。

由于$1<\xi<1+\frac{1}{n}$，所以$\frac{1}{n\times(1+\frac{1}{n})}<\frac{1}{n\xi}<\frac{1}{n\times 1}$，整理得$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n\xi}<\frac{1}{n}$。

所以$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})-\ln 1<\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，第(Ⅰ)问证明完毕。

再来看第(Ⅱ)问。

这第(Ⅱ)问要求证明数列$\{a_n\}$是收敛的。大家记住，只要见到要求证数列收敛，首先就要想到用单调有界来证明。再具体来说，就是证明出数列单调递增且有上界或者证明出数列单调递减且有下界。

现在来解答第(Ⅱ)问。

“单调性”证明如下：

由于$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，于是$a_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)$，所以$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})$。

当$n=1,2,3,\cdots$时，$\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$，所以有$a_{n+1}-a_n<0$，即数列$\{a_n\}$单调递减。

“有下界”证明如下：

先将$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$改写为$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$。第(Ⅰ)问已经证明了$\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，所以有

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}ln(1+\frac{1}{k})-\ln n \qquad (1)$$

我们知道

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k] \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式，得

$$a_n>\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]-\ln n \tag{3}$$

将(3)式中的“$\sum$”展开，得

$$a_n>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]-\ln n=\ln(n+1)-\ln n \tag{4}$$

因为 $y=\ln x$ 是增函数，所以有

$$\ln(n+1)-\ln n>0 \tag{5}$$

(4)式、(5)式相结合，得

$$a_n>0$$

所以数列 $\{a_n\}$ 有下界，下界是0。

综上所述，由于数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界，所以数列 $\{a_n\}$ 收敛。

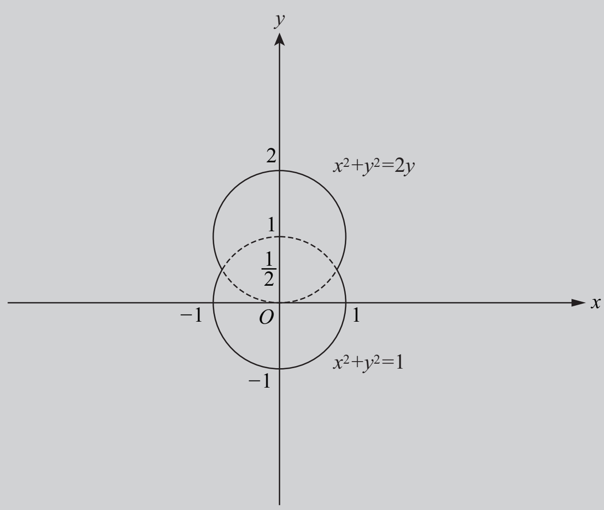
(20)(本题满分11分)

一容器的内侧是由图中曲线绕 $y$ 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 连接而成。

(Ⅰ)求容器的容积；

(Ⅱ)若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

(长度单位：m，重力加速度为 $g\,\mathrm{m/s^2}$，水的密度为 $10^3\,\mathrm{kg/m^3}$)



**解**：本题的第(Ⅰ)问考查的是定积分的几何应用，第(Ⅱ)问考查的是定积分的物理应用。

先来看第(Ⅰ)问。

第一问要求的是容积，而容器的内侧是由图中曲线绕 $y$ 轴旋转一周而成的曲面，所以第(Ⅰ)问实际上求的是：图中绕 $y$ 轴旋转一周而成的旋转体体积。

所以直接套用绕 $y$ 轴旋转的旋转体体积公式即可，即

$$V = \int_a^b \pi f^2(y)\,\mathrm{d}y$$

由图可知，$f(y) = \begin{cases} \sqrt{1-y^2}, & -1 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2y-y^2}, & \dfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$，所以

$$V = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \pi(1-y^2)\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \pi(2y-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{9}{4}\pi$$

再来看第(Ⅱ)问(本问难度较大，近年极少考到，大家大概了解即可)。

第二问是求做功，功等于力乘以距离。

采用微元分析法：力为 $\rho g\pi f^2(y)\,\mathrm{d}y$；距离为 $2-y$。

所以“很小的功”为 $\rho g\pi f^2(y)(2-y)\,\mathrm{d}y$。

现在已经求出了“很小的功”，就要将这一个个“很小的功”求和，也就是积分得到总功。即

$$W = \int_{-1}^{2} \rho g\pi f^2(y)(2-y)\,\mathrm{d}y = \frac{27\times 10^3}{8} g\pi$$

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1, y)=0$，$f(x, 1)=0$，$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a$，其中 $D=\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$，计算二重积分 $I = \iint\limits_D xyf''_{xy}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

**解**：本题要求计算一个二重积分，二重积分的计算方法是转化为“一内一外”两个定积分来计算。现在就先把 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化为“内层对 $y$ 积分，外层对 $x$ 积分”。

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_0^1 xyf''_{xy}(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{1}$$

既然内层是对 $y$ 积分，被积函数中的 $x$ 就可以当成常数提到积分号之外，所以有

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[x\int_0^1 yf''_{xy}(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{2}$$

现在对 $\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}y$ 化简，把被积函数中的 $f''_{xy}(x,y)$ 移到 d 的后面，得

$$\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\,\mathrm{d}f'_x(x,y) \tag{3}$$

对 $\int_0^1 y\,\mathrm{d}f'_x(x,y)$ 使用分部积分公式，得

$$\begin{aligned}\int_0^1 y\,\mathrm{d}f'_x(x,y) &= yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= [1\times f'_x(x,1) - 0\times f'_x(x,0)] - \int_0^1 f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{4}$$

由于 $f(x,1)=0$，所以(4)式可以化简为

$$\int_0^1 y\,\mathrm{d}f'_x(x,y) = -\int_0^1 f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{5}$$

(3)式、(5)式相结合，得

$$\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{6}$$

(2)式、(6)式相结合，得

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 [x(-\int_0^1 f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y)]\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

把(7)式中的“$-$”放到最前面，有

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^1 [x(\int_0^1 f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y)]\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

把(8)式中的“$x$”再放到里面(既然内层是对 $y$ 积分，那 $x$ 对于内层的积分来说就相当于是常数，所以可以从被积函数中提到外面，也可以从外面放到被积函数中)，得

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^1 [(\int_0^1 xf'_x(x,y)\,\mathrm{d}y)]\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

现在交换一下 $-\int_0^1 [(\int_0^1 xf'_x(x,y)\,\mathrm{d}y)]\,\mathrm{d}x$ 的积分次序。即改成内层对 $x$ 积分外层对 $y$ 积分，得

$$-\int_0^1 [(\int_0^1 xf'_x(x,y)\,\mathrm{d}y)]\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 [(\int_0^1 xf'_x(x,y)\,\mathrm{d}x)]\,\mathrm{d}y \tag{10}$$

(9)式、(10)式相结合，得

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^1 [(\int_0^1 xf'_x(x,y)\,\mathrm{d}x)]\,\mathrm{d}y \tag{11}$$

对 $\int_0^1 xf'_x(x,y)\,\mathrm{d}x$ 化简，把被积函数中的 $f'_x(x,y)$ 移到 d 的后面，得

$$\int_0^1 xf'_x(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}f(x,y) \tag{12}$$

对 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}f(x,y)$ 使用分部积分公式，得

$$\int_0^1 x\mathrm{d}f(x, y) = xf(x, y)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x \tag{13}$$

$$= [1 \times f(1, y) - 0 \times f'_x(0, y)] - \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x$$

由于$f(1, y) = 0$，所以(13)式可以化简为

$$\int_0^1 x\mathrm{d}f(x, y) = -\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x \tag{14}$$

(12)式、(14)式相结合，得

$$\int_0^1 xf'_x(x, y)\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x \tag{15}$$

(11)式、(15)式相结合，得

$$\iint_D xyf''_{xy}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^1 [-\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y \tag{16}$$

显然(16)式可以化简为

$$\iint_D xyf''_{xy}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{17}$$

已知

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a \tag{18}$$

又已知$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$，所以有

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{19}$$

(18)式、(19)式相结合，得

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a \tag{20}$$

(17)式、(20)式相结合，得

$$\iint_D xyf''_{xy}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a \tag{21}$$

本题最终的答案是$a$。

(22)（本题满分 11 分）

设向量组 $\overrightarrow{\alpha_1} = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，$\overrightarrow{\alpha_2} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\overrightarrow{\alpha_3} = (1, 3, 5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\overrightarrow{\beta_1} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\overrightarrow{\beta_2} = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$，$\overrightarrow{\beta_3} = (3, 4, a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示。

(Ⅰ)求$a$的值。

(Ⅱ)将$\overrightarrow{\beta_1}$、$\overrightarrow{\beta_2}$、$\overrightarrow{\beta_3}$用$\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$线性表示。

**解：**本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

先把 $\overrightarrow{\alpha_1}=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\alpha_2}=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\alpha_3}=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 这三个向量写成一个矩阵, 即 $(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}$。

然后计算该矩阵所对应的行列式的值, 即

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=1$$

由于该矩阵所对应的行列式的值不等于0, 说明矩阵 $(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})$ 是满秩矩阵, 也就是说秩为3。$\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$ 也是三个向量, 说明 $\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$ 这三个向量线性无关。

已知 $\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$ 不能由 $\overrightarrow{\beta_1}$、$\overrightarrow{\beta_2}$、$\overrightarrow{\beta_3}$ 线性表示, 所以 $\overrightarrow{\beta_1}$、$\overrightarrow{\beta_2}$、$\overrightarrow{\beta_3}$ 这三个向量是线性相关的。

于是可得 $|\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\overrightarrow{\beta_3}|=0$。

由于 $\overrightarrow{\beta_1}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\beta_2}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\beta_3}=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$, 所以

$$|\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\overrightarrow{\beta_3}|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}。$$

通过计算可得 $|\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\overrightarrow{\beta_3}|=a-5$。

刚才已经推出了 $|\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\overrightarrow{\beta_3}|=0$, 所以有 $a-5=0$, 解得 $a=5$。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问要求将 $\overrightarrow{\beta_1}$、$\overrightarrow{\beta_2}$、$\overrightarrow{\beta_3}$ 用 $\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示, 这问题实际上是说: 请将 $\overrightarrow{\beta_1}$ 用 $\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示, 将 $\overrightarrow{\beta_2}$ 用 $\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示, 将 $\overrightarrow{\beta_3}$ 用 $\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示。

所以第(Ⅱ)问实际上包含三个小问。

这里只详细讲解第一小问, 第二和第三小问就只公布答案就行了。因为第二、第三小问与第一小问的解答方法是一样的。

现在来做第一小问, 即"将 $\overrightarrow{\beta_1}$ 用 $\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示"。

先写一个式子:

$$\overrightarrow{\beta_1}=x_1\overrightarrow{\alpha_1}+x_2\overrightarrow{\alpha_2}+x_3\overrightarrow{\alpha_3}$$

最终只需解出 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 即可。

由于 $\overrightarrow{\beta_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, 所以 $\overrightarrow{\beta_1}=x_1\overrightarrow{\alpha_1}+x_2\overrightarrow{\alpha_2}+x_3\overrightarrow{\alpha_3}$ 可以展开为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, 进一步展开为

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

这是一个非齐次线性方程组，只需解方程组即可。

由于该方程组中所包含的方程个数是 3，未知数个数也是 3，所以此方程组属于“方程个数等于未知数个数”的方程组，可以用克拉默法则来求解。

先计算该非齐次线性方程组的系数行列式 $D$。

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 0 + 0 - 1 - 3 - 0 = 1$$

1

首先，用方程组右侧的 1 替换第一列，得

1

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 0 + 1 - 1 - 3 - 0 = 2$$

1

接着，用方程组右侧的 1 替换第二列，得

1

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 3 + 0 - 1 - 3 - 0 = 4$$

1

最后，用方程组右侧的 1 替换第三列，得

1

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 1 - 1 - 0 = -1$$

综上所述，有

$x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{2}{1} = 2$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{4}{1} = 4$，$x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{-1}{1} = -1$。

所以有 $\overrightarrow{\beta_1} = 2\overrightarrow{\alpha_1} + 4\overrightarrow{\alpha_2} - \overrightarrow{\alpha_3}$。

于是第一小问（将 $\overrightarrow{\beta_1}$ 用 $\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示）就完成了，同理有

$\overrightarrow{\beta_2} = \overrightarrow{\alpha_1} + 2\overrightarrow{\alpha_2}$

$\overrightarrow{\beta_3} = 5\overrightarrow{\alpha_1} + 10\overrightarrow{\alpha_2} - 2\overrightarrow{\alpha_3}$

(23)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量。

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$。

**解**：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，所以肯定总共有三个特征值。

现在先把“特征值、特征向量的定义式”告诉大家。

设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，使得 $\boldsymbol{A}\vec{\xi} = \lambda\vec{\xi}$ ( $\vec{\xi} \neq \vec{0}$ )成立的数 $\lambda$ 和非零向量 $\vec{\xi}$ 分别称为：方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda$ 的特征向量(或称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda$ 所对应的特征向量)。

由于 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，可以将这个等式拆分为两个等式。

第一个等式：$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

第二个等式：$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

第一个等式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 可以写为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，根据“特征值、特征向量的定义式”直接可得：$-1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，该特征值对应的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，其中 $k_1 \neq 0$。

第二个等式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 可以写为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，根据“特征值、特征向量的定义式”直

接可得：1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，该特征值对应的全部特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 $k_2 \neq 0$。

又由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵且秩为 2，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第三个特征值是 0（实对称矩阵有 $n-r$ 个为 0 的特征值，所以对于本题所给的矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $3-2=1$ 个特征值为 0）。

第（Ⅰ）问还没有做完，还要求出 0 这个特征值所对应的特征向量。怎么求呢？就根据“实对称矩阵不同特征值所对应的特征向量必正交”来求。

设 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ 为特征值 0 所对应的若干个特征向量之一，则有：

由于特征值 0 和特征值 1 是两个不同的特征值，所以这两个特征值所对应的特征向量是正交的。即 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 正交，所以有 $1a_1+0a_2+1a_3=0$，化简得 $a_1+a_3=0$。

由于特征值 0 和特征值 $-1$ 是两个不同的特征值，所以这两个特征值所对应的特征向量是正交的。即 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 正交，所以有 $1a_1+0a_2+1a_3=0$，化简得 $a_1-a_3=0$。

联立等式：

$$\begin{cases}a_1+a_3=0\\a_1-a_3=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a_1=0\\a_2=1\\a_3=0\end{cases}$

有的同学可能会想为什么 $a_2=1$。实际上，$a_2$ 也可以等于其他数，如 2、3、4…都可以，因为 $\begin{cases}a_1+a_3=0\\a_1-a_3=0\end{cases}$ 中根本就没有出现 $a_2$，所以 $a_2$ 可以任意取值。但是大家一定要注意，$a_2$ 不能等于 0，因为如果 $a_2=0$，就有 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，而特征向量的定义中规定特征向量必须是非零向量，所以 $a_2$ 不能等于 0。此处 $a_2$ 取 1。

现在已经解出 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，即特征值 0 所对应的特征向量为 $k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 $k_3 \neq 0$。

第(Ⅰ)问到这里就解答了，即：

$-1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且特征值 $-1$ 对应的全部特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，其中 $k_1 \neq 0$。

1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且特征值 1 对应的全部特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 $k_2 \neq 0$。

0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且特征值 0 对应的全部特征向量为 $k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 $k_3 \neq 0$。

再来看第(Ⅱ)问。

由于 1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是特征值 1 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

由于 $-1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是特征值 $-1$ 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

由于 0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是特征值 0 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。

将这三个等式写在一起，有：

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

将上式的等式左右两侧同时右乘 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

化简得

$$\boldsymbol{AE}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

再化简得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

接下来就是纯计算过程了，不再赘述。最后的计算结果为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

# 2010 年全国硕士研究生<br>入学统一考试试题及精解

## 一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1)函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为(　　)。

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

**解**：由于 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$，所以可以很直观地看出函数 $f(x)$ 的间断点是 $x=-1$、$x=0$、$x=1$(因为当 $x$ 取这三个值时，分母为 0，而我们知道分母不能为 0)。

那么本题就应该选择(D)选项吗？当然不是，我们判断出的只是"间断点的个数"，而本题问的是"无穷间断点的个数"。所以接下来的任务就是判断一下 $x=-1$、$x=0$、$x=1$ 这三个点中到底哪个点或哪些点是无穷间断点。

在正式开始判断之前，先将函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 进行一下改写。

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\
&=\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\times\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\\
&=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|(x+1)}
\end{aligned}
$$

先验证一下间断点 $x=-1$ 是不是无穷间断点(如果左极限 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ 至少一个是 $\infty$，那么就说明 $x=-1$ 是无穷间断点；如果左极限 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ 都存在，那么就说明 $x=-1$ 不是无穷间断点)。

计算可知 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|(x+1)}=\infty$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|(x+1)}=\infty$，所以间断点 $x=-1$ 是无穷间断点。

再来验证一下间断点 $x=1$ 是不是无穷间断点。

计算可知 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|(x+1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|(x+1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以间断点 $x=1$ 不是无穷间断点。

最后来验证一下间断点 $x=0$ 是不是无穷间断点。

计算可知 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|(x+1)}=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|(x+1)}=1$，所以间断点 $x=0$ 不是无穷间断点。

所以在 $x=-1$、$x=0$、$x=1$ 这三个间断点中，只有 $x=-1$ 是无穷间断点，本题应该选择(B)选项。

(2)设 $y_1$、$y_2$ 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 $\lambda$、$\mu$ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则(　　)。

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\mu=\dfrac{1}{2}$　　(B) $\lambda=-\dfrac{1}{2}$，$\mu=-\dfrac{1}{2}$

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3}$，$\mu=\dfrac{1}{3}$　　(D) $\lambda=\dfrac{2}{3}$，$\mu=\dfrac{2}{3}$

**解：** 由于 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，这就意味着：把 $y=\lambda y_1+\mu y_2$ 代入 $y'+p(x)y$ 中，其结果必然是 $q(x)$。代入之后得：

$$\begin{aligned}y'+p(x)y&=(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)\\&=\lambda[y_1'+p(x)y_1]+\mu[y_2'+p(x)y_2]\\&=\lambda q(x)+\mu q(x)\\&=(\lambda+\mu)q(x)\end{aligned}$$

所以有 $(\lambda+\mu)q(x)=q(x)$，由此可知：

$$\lambda+\mu=1 \tag{1}$$

由于 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+p(x)y=0$ 的解，这就意味着：把 $y=\lambda y_1-\mu y_2$ 代入 $y'+p(x)y$ 中，其结果必然是0。代入之后得

$$\begin{aligned}y'+p(x)y&=(\lambda y_1-\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1-\mu y_2)\\&=\lambda[y_1'+p(x)y_1]-\mu[y_2'+p(x)y_2]\\&=\lambda q(x)-\mu q(x)\\&=(\lambda-\mu)q(x)\end{aligned}$$

所以有 $(\lambda-\mu)q(x)=0$，由此可知：

$$\lambda-\mu=0 \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda-\mu=0\end{cases}$$

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$, $\mu=\dfrac{1}{2}$。

本题应该选择(A)选项。

(3)曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，则 $a=$(　　)。

(A)4e　　(B)3e　　(C)2e　　(D)e

**解**：已知曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，设切点为 $(x_0, y_0)$。

我们知道，若两条曲线在某一点相切，则必然有如下结论成立：

① 这两条曲线在切点处的函数值相等。

② 这两条曲线在切点处的导数值相等。

所以对于本题而言，有

$$\begin{cases}{x_0}^2=a\ln x_0\\ 2x_0=\dfrac{a}{x_0}\end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases}x_0=e^{\frac{1}{2}}\\ a=2e\end{cases}$$

所以本题应该选择(C)选项。

(4)设 $m$、$n$ 均是正整数，则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性(　　)。

(A)仅与 $m$ 的取值有关　　(B)仅与 $n$ 的取值有关

(C)与 $m$、$n$ 的取值都有关　　(D)与 $m$、$n$ 的取值都无关

**解**：很明显，$\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 是一个反常积分。现将这个反常积分拆为

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$$

可以判断出无论 $m$、$n$ 取何值，$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 都收敛；同理，可以判断出无论 $m$、$n$ 取何值，$\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 都收敛。

又因为 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，所以无论 $m$、$n$ 取何值，反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 都是收敛的，即反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性与 $m$、$n$ 的取值都无关，本题应该选择(D)选项。

(5)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 $F$ 为可微函数，且 $F'_2\neq 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=($　　$)$。

(A) $x$　　(B) $z$　　(C) $-x$　　(D) $-z$

**解**：本题的解题思路非常明显，只要算出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$，然后代入 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ 中就可以了。

先来算 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两边分别对 $x$ 求偏导，得 $F_1'\times\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\times\left(-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\times\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$。

再来算 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两边分别对 $y$ 求偏导，得 $F_1'\times\frac{1}{x}+F_2'\times\frac{1}{x}\times\frac{\partial z}{\partial y}=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1'}{F_2'}$。

现在把 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$、$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1'}{F_2'}$ 代入 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ 中，得：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\times\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}+y\times\frac{-F_1'}{F_2'}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=\frac{zF_2'}{F_2'}=z$$

所以本题应该选择(B)选项。

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=($　　$)$。

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　(B) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　(D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

**解**：先将 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ 变一下形。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n(1+\frac{i}{n})n^2\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}\times\frac{1}{n^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{n}$$

由“积分和式法”可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\times\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$$

本题应该选择(D)选项。

(7)设向量组Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示。下列命题正确的是(　　)。

(A)若向量组Ⅰ线性无关，则 $r\leqslant s$

(B)若向量组Ⅰ线性相关，则 $r>s$

(C)若向量组Ⅱ线性无关，则 $r\leqslant s$

(D)若向量组Ⅱ线性相关，则 $r>s$

**解**：要想做对本题，大家一定要知道以下定理：

设有向量组 A 和向量组 B，向量组 A 中包含了 $s$ 个向量，向量组 B 中包含了 $t$ 个向量。

① 若向量组 B 可以由向量组 A 线性表示，且 $t>s$，则：向量组 B 中包含的 $t$ 个向量线性相关。

② 若向量组 B 可以由向量组 A 线性表示，且向量组 B 中包含的 $t$ 个向量线性无关，则 $t\leqslant s$。

由以上定理中的②可知本题应该选择(D)选项。

(8)设$\boldsymbol{A}$为4阶实对称矩阵，且$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。若$\boldsymbol{A}$的秩为3，则$A$相似于(　　)。

(A)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(B)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(D)$\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

**解**：有的同学可能不太明白为什么本题四个选项所给的矩阵中有大片的空白，其实这是省略的写法，补充完整就是：(A)选项$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，(B)选项$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，(C)选项$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，(D)选项$\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$。

题中所给的四个选项有一个共同点，那就是：它们都是对角矩阵。所以本题的问题相当于：矩阵$\boldsymbol{A}$可以相似于以下哪个对角矩阵。

我们知道，若某矩阵可以相似于对角矩阵，那么对角矩阵的对角线的数必然是该矩阵的特征值。所以，现在只需求出矩阵$A$的特征值即可。具体来说，分为以下四种情况。

情况1：若求出的矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值是1、1、1、0，那么矩阵$\boldsymbol{A}$就相似于$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，本题应该选择(A)选项。

情况2：若求出的矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值是1、1、$-1$、0，那么矩阵$\boldsymbol{A}$就相似于$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，本题应该选择(B)选项。

情况3：若求出的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1、-1、-1、0，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就相似于 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，本题应该选择(C)选项。

情况4：若求出的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 -1、-1、-1、0，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就相似于 $\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，本题就应该选择(D)选项。

下面来求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

我们用 $\lambda$ 来表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由于 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，所以有 $\lambda^2+\lambda=0$，解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-1$。

如果是在考试，那么同学们此刻就可以选择出答案，本题应该选择(D)选项。下面再解释一下为何矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的四个特征值是三个 -1 一个 0。

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，我们知道，实对称矩阵有且仅有 $n-r$ 个特征值为 0。那么对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而言，$n=4$，$r=3$，所以 $n-r=4-3=1$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征值为 0。而刚才已经证明了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 0 或 -1，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的剩下三个特征值都是 -1，本题应该选择(D)选项。

## 二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9)3 阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$ ________。

**解**：先来看一下求三阶常系数线性齐次微分方程通解的方法。

求三阶常系数线性齐次微分方程通解的方法如下。

设三阶常系数线性齐次微分方程为 $y'''+ay''+by'+cy=0$，应该首先写出特征方程 $r^3+ar^2+br+c=0$，然后解此特征方程，肯定能解出三个解 $r_1$、$r_2$、$r_3$。

情况1：若 $r_1$、$r_2$、$r_3$ 均为实数，且三者互不相等，则通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}+C_3\mathrm{e}^{r_3x}$。

情况2：若 $r_1$、$r_2$、$r_3$ 均为实数，且三者中有两者相等(即 $r_1=r_2$)，则通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}+C_3\mathrm{e}^{r_3x}$。

情况3：若 $r_1$、$r_2$、$r_3$ 均为实数，且三者均相等(即 $r_1=r_2=r_3$)，则通解为 $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)\mathrm{e}^{r_1x}$。

情况 4：若 $r_1$、$r_2$、$r_3$ 这三者中有两者是复数（即 $r_1=\alpha+\beta i$、$r_2=\alpha-\beta i$），有一者是实数（$r_3$），则通解为 $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)+C_3\mathrm{e}^{r_3x}$。

现在就按以上方法来求解本题。

对于三阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$，可以写出特征方程 $r^3-2r^2+r-2=0$，解得 $r_1=i$、$r_2=-i$、$r_3=2$。此时的情况很明显是情况 4（其中 $\alpha=0$、$\beta=1$），所以通解为

$$y=\mathrm{e}^0(C_1\cos x+C_2\sin x)+C_3\mathrm{e}^{2x}=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\mathrm{e}^{2x}$$

本题应填 $C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\mathrm{e}^{2x}$。

（10）曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为________。

**解**：渐近线分为三种，分别是：水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线。

要想做对本题，就必须知道这三种渐近线究竟应该怎么求。所以，先来给大家讲一下以上三种渐近线的求法。

先来看水平渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，要求该函数的水平渐近线时，需要分 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情况。

$x\to+\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，若结果是“常数 $a$”，则 $y=a$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

$x\to-\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，若结果是“常数 $b$”，则 $y=b$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线（当然了，如果“常数 $a$ = 常数 $b$”，那 $y=a$ 和 $y=b$ 就是同一条水平渐近线）。

再来看铅直渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，要求该函数的铅直渐近线时，需要找一种点，即函数 $f(x)$ 在该点处没有定义，但是存在一个该点的左去心邻域（或者存在一个该点的右去心邻域，或者存在一个该点的去心邻域），函数 $f(x)$ 在该邻域内有定义。

我们把找到的点记为 $x_0$。

然后计算一下 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，如果这两者的计算结果中至少有一个是 $\infty$，那么就说明 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的铅直渐近线。

最后看斜渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，要求该函数的斜渐近线时，需要分 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情况。

$x\to+\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，若结果是“非零常数 $a$”，再计算一下 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$，若计算出的结果是“常数 $b$”，则 $y=ax+b$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

$x\to-\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，若结果是“非零常数 $c$”，再计算一下 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-cx]$，若结果是“常数 $d$”，则 $y=cx+d$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线(当然了，如果“常数 $a$ = 常数 $b$”、“常数 $c$ = 常数 $d$”，那 $y=ax+b$ 和 $y=cx+d$ 就是同一条斜渐近线)。

现在,水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线的求法已经讲完了。下面正式来看本题。

先来看看曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 有没有水平渐近线。

$x\to+\infty$ 的情况：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}\right)=+\infty\neq \text{常数}$$

$x\to-\infty$ 的情况：

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}\right)=-\infty\neq \text{常数}$$

综上所述，函数 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 没有水平渐近线。

再来看看函数 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 有没有铅直渐近线。

由于函数 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 根本不存在没有定义的点，所以没有铅直渐近线。

最后来看看函数 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 有没有斜渐近线。

$x\to+\infty$ 的情况：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{2x^3}{x^2+1}}{x}\right)=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}-2\times x\right)=0$$

所以 $y=2x$ 是一条斜渐近线。

$x\to-\infty$ 的情况：

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{2x^3}{x^2+1}}{x}\right)=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}-2\times x\right)=0$$

所以 $y=2x$ 是一条斜渐近线(这与刚才求出来的斜渐近线是同一条线)。

综上所述，函数 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 没有水平渐近线也没有铅直渐近线，但是有一条斜渐近线 $y=2x$。

本题应填 $y=2x$。

(11)函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 $n$ 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________。

**解**：由于 $y=\ln(1-2x)$，所以

$$y'=\frac{-2}{1-2x}=-2(1-2x)^{-1}$$

$$y''=-2\times(-1)\times(1-2x)^{-2}\times(-2)=-2^2(1-2x)^{-2}$$

$$y'''=-2^3\cdot2\cdot(1-2x)^{-3}$$

$$y^{(4)}=-2^4\cdot2\cdot3\cdot(1-2x)^{-4}$$

由此可以轻易地通过数学归纳法证明 $y^{(n)}=-2^n(n-1)!(1-2x)^{-n}$，所以有：

$$y^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!(1-0)^{-n}=-2^n(n-1)!$$

本题应填 $-2^n(n-1)!$。

(12)当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时，对数螺线 $r=e^\theta$ 的弧长为________。

**解**：本题非常的简单，只需直接套用“极坐标系下的弧长计算公式 $\int_a^b\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$”即可。

即

$$弧长=\int_0^\pi\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi\sqrt{e^{2\theta}+e^{2\theta}}\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}(e^\pi-1)$$

本题应填 $\sqrt{2}(e^\pi-1)$。

(13)已知一个长方形的长 $l$ 以 2cm/s 的速率增加，宽 $w$ 以 3cm/s 的速率增加。则当 $l=12$cm，$w=5$cm 时，它的对角线增加的速率为________。

**解**：由题意可知，长方形的长为 $l$，宽为 $w$，它们随时间 $t$ 而变化。由于“长变化的速率是 2，宽变化的速率为 3”，所以有

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=3 \tag{2}$$

设对角线的长度为 $A$，由于长方形对角线的长度等于 $\sqrt{长^2+宽^2}$，所以有

$$A=\sqrt{l^2+w^2} \tag{3}$$

将(3)式的左右两侧平方，得

$$A^2=l^2+w^2 \tag{4}$$

很明显，本题要求的是 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$，下面继续求解。

将(3)式的等式左右两侧对 $t$ 求导得

$$2A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}+2w\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

已知 $l=12$，$w=5$，代入 $A=\sqrt{l^2+w^2}$ 中就可以求出 $A=13$。现将 $l=12$、$w=5$、$A=13$、$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2$、$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=3$ 代入(5)式，就可以解得

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=3 \tag{6}$$

所以本题应填 3cm/s。

(14)设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________。

**解**：我们知道，矩阵 $\boldsymbol{E}$ 乘以任何矩阵都等于该矩阵本身，所以有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{EA}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E} \tag{1}$$

而 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{EA}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}$ 可以变为

$$\boldsymbol{EA}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}) \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}) \tag{3}$$

而 $(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})$ 很明显可以写为

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} \tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} \tag{5}$$

由于矩阵乘法满足分配律，所以有

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A} \tag{6}$$

(5)式、(6)式相结合，得

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A} \tag{7}$$

由于矩阵加法满足交换律，所以有

$$\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} \tag{8}$$

(7)式、(8)式相结合，得

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} \tag{9}$$

将(9)式的等式左右两侧取绝对值，得

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}| \tag{10}$$

$|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}|$ 可以拆为

$$|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}^{-1}|\times|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|\times|\boldsymbol{A}| \tag{11}$$

(10)式、(11)式相结合，得

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}|\times|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|\times|\boldsymbol{A}| \tag{12}$$

已知 $|\boldsymbol{B}|=2$，所以 $|\boldsymbol{B}^{-1}|=\dfrac{1}{2}$。把 $|\boldsymbol{A}|=3$、$|\boldsymbol{B}^{-1}|=\dfrac{1}{2}$、$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$ 代入(12)式，得

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3 \tag{13}$$

所以本题应填3。

## 三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值。

**解**：本题有两问，第一问求单调区间，第二问求极值。无论是求单调区间，还是求极值，都是有固定套路的。所以在正式解答本题之前，先给大家总结一下求单调区间和求极值的固定套路。

求单调区间的固定套路如下。

第一步：写出该函数的定义域。

第二步：求两种点，第一种点是驻点(即一阶导数为 0 的点)，第二种点是不可导点(即一阶导没有定义的点)。

第三步：用求出的驻点和不可导点划分定义域。

第四步：在每个区间内任取一个点(取点的原则是好算)，代入导函数中，依据导函数大于0 还是小于0 确定单调性。

求极值的固定套路如下。

第一步：写出该函数的定义域。

第二步：求两种点，即驻点和不可导点。

第三步：用求出的驻点和不可导点划分定义域。

第四步：每个区间内任取一个点(取点的原则是好算)，代入导函数中，依据导函数大于0还是小于0确定单调性。

第五步：极值点肯定是取自驻点或者不可导点。具体来说就是看每个驻点和不可导点两侧区域的单调性。“左增右减”是极大值点，“左减右增”是极小值点，“同增同减”则不是极值点。

若题目问的是求极值点的话，那这就解答完了；若题目是求极值的话，那就还有接下来的第六步。

第六步：将上一步所求得的极值点代入函数中，算出函数值，即是极值。

以上就是求单调区间和求极值的固定套路。对比一下就会发现，求单调区间的固定套路其实就是求极值的固定套路中的前四步，所以我们可以把本题的两问合成一问来做。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题而言，定义域是$(-\infty, +\infty)$。

第二步：求两种点，第一种点是驻点，第二种点是不可导点。

先来求驻点。先要求一阶导数。由于$y=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$，所以$y'=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$。令一阶导数为0，即

$$2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt=0$$

解得$x=-1$，$x=0$，$x=1$。

驻点就求完了，再来求不可导点。

一阶导数是$y'=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，在第一步求得的定义域$(-\infty, +\infty)$上$y'$存在没有定义的点吗？不存在！

所以没有不可导点。

第三步：用求出的驻点和不可导点划分定义域。

对于本题而言，第二步求出的驻点和不可导点总共有三个(其中驻点三个，不可导点零个)，所以用这三个点$x=-1$、$x=0$、$x=1$来划分定义域$(-\infty, +\infty)$，可以划分为四个区域：$(-\infty, -1)$，$(-1, 0)$，$(0, 1)$，$(1, +\infty)$。

第四步：每个区间内任取一个点(取点的原则是方便计算)，然后把取的点代入导函数中，根据导函数大于0还是小于0确定单调性。

在区间$(-\infty, -1)$内任取一点代入导函数$y'=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$中，发现$y'<0$，所以函数

$y=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递减。

在区间 $(-1,0)$ 内任取一点代入导函数 $y'=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 中，发现 $y'<0$，所以函数 $y=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递增。

在区间 $(0,1)$ 内任取一点代入导函数 $y'=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 中，发现 $y'<0$，所以函数 $y=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减。

在区间 $(1,+\infty)$ 内任取一点代入导函数 $y'=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 中，发现 $y'>0$，所以函数 $y=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增。

第五步：极值点肯定是取自驻点或者不可导点。具体来说就是看每个驻点和不可导点两侧区域的单调性。“左增右减”是极大值点，“左减右增”是极小值点，“同增同减”则不是极值点。

对于本题而言，情况如下：

$(-\infty,-1)$　　$-1$　　$(-1,0)$　　$0$　　$(0,1)$　　$1$　　$(1,+\infty)$

先来看 $x=-1$ 这个点。第四步已经判断出它左侧的区间 $(-\infty,-1)$ 是单调递减区间，右侧的区间 $(-1,0)$ 是单调递增区间，$x=-1$ 属于“左减右增”，所以 $x=-1$ 是一个极小值点。

再来看 $x=0$ 这个点。第四步已经判断出它左侧的区间 $(-1,0)$ 是单调递增区间，右侧的区间 $(0,1)$ 是单调递减区间，$x=0$ 属于“左增右减”，所以 $x=0$ 是一个极大值点。

最后来看 $x=1$ 这个点。第四步已经判断出它左侧的区间 $(0,1)$ 是单调递减区间，右侧的区间 $(1,+\infty)$ 是单调递增区间，$x=1$ 属于“左减右增”，所以 $x=1$ 是一个极小值点。

第六步：将求得的极值点代入函数中，算出函数值，即是极值。

对于本题而言：

极小值点 $x=-1$ 所对应的极小值为 $f(-1)=0$。

极大值点 $x=0$ 所对应的极大值为 $f(0)=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$。

极小值点 $x=1$ 所对应的极小值为 $f(1)=0$。

(16)（本题满分 10 分）

(Ⅰ) 比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

(Ⅱ) 记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$。

**解**：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问是比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$与$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$的大小，这两个积分的上下限都一样，所以只需比较被积函数的大小即可(当然，被积函数中的$t$的取值范围是$0<t<1$，因为积分上下限是1和0)。

大家都知道，当$0<t<1$时，必有$0<\ln(1+t)<t$(这个结论很关键)。所以当$0<t<1$时，必有$[\ln(1+t)]^n<t^n$。而$|\ln t|>0$，所以当$0<t<1$时，必有$[\ln(1+t)]^n|\ln t|<t^n|\ln t|$。因此有$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$。

再来看第(Ⅱ)问。

已知$u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$，由于积分下限小于积分上限(即$0<1$)，并且被积函数在区间$(0,1)$上大于0，所以很明显有

$$u_n>0 \tag{1}$$

而第(Ⅰ)问已经证明了

$$u_n<\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$0<u_n<\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t \tag{3}$$

现在来计算$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$。

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t&=-\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln t\mathrm{d}(t^{n+1})\\&=-\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\Big|_{0^+}^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}\times\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

所以(3)式可以变为

$$0<u_n<\frac{1}{(n+1)^2} \tag{4}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}0=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$，根据夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数，且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$，已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，求函数 $\psi(t)$。

**解**：由于 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{2(t+1)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\frac{\psi'(t)}{2(t+1)})}{dx}=\frac{d(\frac{\psi'(t)}{2(t+1)})}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{1}{4}\,\frac{(t+1)\psi''(t)-\psi'(t)}{(t+1)^3}$$

已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，所以必有 $\dfrac{1}{4}\,\dfrac{(t+1)\psi''(t)-\psi'(t)}{(t+1)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，整理得 $(t+1)\psi''(t)-\psi'(t)=3(t+1)^2$。已知 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$，所以本题的问题“求函数 $\psi(t)$”此时已经被转化为了“求微分方程 $(t+1)\psi''(t)-\psi'(t)=3(t+1)^2$ 在初始条件 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$ 下的特解”。

这个特解应该如何求呢？$(t+1)\psi''(t)-\psi'(t)=3(t+1)^2$ 是一个二阶微分方程，但并不是常系数，而是变系数，所以我们采用降阶法来计算。具体过程如下：

令 $P=\psi'(t)$，则微分方程 $(t+1)\psi''(t)-\psi'(t)=3(t+1)^2$ 变为 $(t+1)P'-P=3(t+1)^2$，整理得 $P'-\dfrac{1}{t+1}P=3(t+1)$。$P'-\dfrac{1}{t+1}P=3(t+1)$ 是一个一阶微分方程，可以求得这个一阶微分方程的通解为 $\dfrac{1}{t+1}P=3t+C_1$。

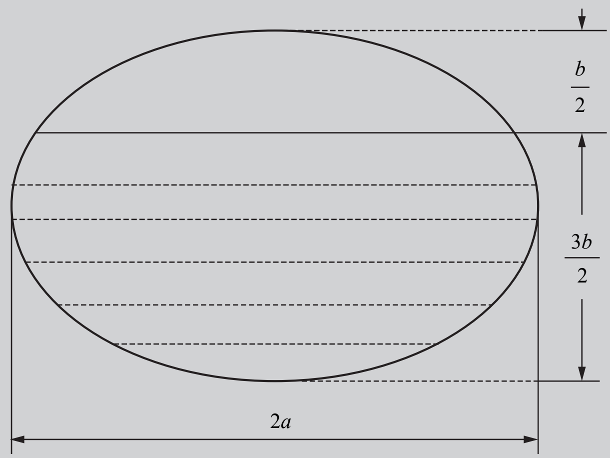
由于 $\psi'(1)=6$，即 $P(1)=6$，所以把 $P(1)=6$ 代入 $\dfrac{1}{t+1}P=3t+C_1$ 中，可以解得 $C_1=0$，所以有 $\dfrac{1}{t+1}P=3t$。

整理得 $P=3t(t+1)$，再把 $P=3t(t+1)$ 中的 $P$ 还原为 $\psi'(t)$，于是有 $\psi'(t)=3t(t+1)$。将 $\psi'(t)=3t(t+1)$ 的等式左右两侧同时积分得 $\psi(t)=t^3+\dfrac{3}{2}t^2+C_2$。

由于 $\psi(1)=\frac{5}{2}$，所以把 $\psi(1)=\frac{5}{2}$ 代入 $\psi(t)=t^3+\frac{3}{2}t^2+C_2$ 中，可以解得 $C_2=0$，所以有 $\psi(t)=t^3+\frac{3}{2}t^2$。

(18)(本题满分 10 分)

一个高为 $l$ 的柱体形储油罐，底面是长轴为 $2a$、短轴为 $2b$ 的椭圆。现将储油罐平放，当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时(如图所示)，计算油的质量。(长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为常数 $\rho\,\mathrm{kg/m^3}$。)




**解**：由物理原理可知，质量等于密度乘以体积。所以有

$$m=\rho V \tag{1}$$

**注**：式中，$\rho$ 是油的密度常数，$V$ 是平放以后直柱体的体积(罐子平放以后，很明显油会形成一个直柱体)。

我们都知道，体积等于面积乘以高。所以有

$$V=Sl \tag{2}$$

**注**：式中，$S$ 是直柱体的截面积，$l$ 是直着放的时候罐子的高。

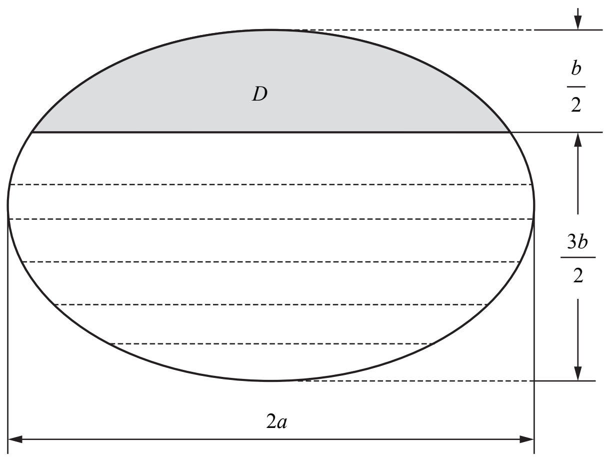
(1)式、(2)式相结合，得

$$m=\rho Sl \tag{3}$$

而现在 $\rho$ 和 $l$ 都是已知项，所以我们的任务就是计算出 $S$。

下面画一个图。

则必有：




$$S = 整个油罐的底面积 - S_D \tag{4}$$

而根据椭圆面积公式可知

$$整个油罐的底面积 = \pi ab \tag{5}$$

(4)式、(5)式相结合，得

$$S = \pi ab - S_D \tag{6}$$

那么区域 $D$ 的面积 $S_D$ 该怎么算呢？先把区域 $D$ 写出来，即

$$D = \{(x, y) \mid \frac{b}{2} \leqslant y \leqslant b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}a\}$$

所以有：

$$S_D = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{b}{2}\right)dx = ab\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \tag{7}$$

(6)式、(7)式相结合，得

$$S = \pi ab - ab\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = ab\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \tag{8}$$

把(8)式代入(3)式，得

$$m = \rho Sl = \rho abl\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \tag{9}$$

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$。确定 $a$、$b$ 的值，使等式在变换 $\xi = x + ay$, $\eta = x + by$ 下化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$。

**解**：已知 $u=f(x,y)$，这就说明 $u$ 是 $x$、$y$ 的函数。然而，在变换 $\xi=x+ay$，$\eta=x+by$ 下，很明显 $u$ 就成为了 $\xi$、$\eta$ 的函数。

所以根据复合函数求导法则可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\times 1+\frac{\partial u}{\partial \eta}\times 1=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\times a+\frac{\partial u}{\partial \eta}\times b=a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

为什么要求以上两者？这是为了进一步求出以下三者：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x}\\&=\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta})}{\partial x}\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\times 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\times 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\times 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\times 1\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\times 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\times 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\times 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\times 1\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial y}\\&=\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta})}{\partial y}\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\times a+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\times b+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\times b+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\times a\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\times a+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\times b+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\times b+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\times a\\&=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y}\\&=\frac{\partial(a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta})}{\partial y}\end{aligned}$$

$$= a \times (\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \times a + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \times b) + b(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \times b + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \times a)$$

$$= a \times (\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \times a + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \times b) + b(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \times b + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \times a)$$

$$= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

将计算出的这三者代入 $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 中，可得：

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (5a^2 + 12a + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (5b^2 + 12b + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + [8 + 12(a + b) + 10ab] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

已知

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

这两个式子相结合，得：

$$(5a^2 + 12a + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (5b^2 + 12b + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + [8 + 12(a + b) + 10ab] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

而按照题意，上式可以化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$，那么就必有

$$\begin{cases} 5a^2 + 12a + 4 = 0 \\ 5b^2 + 12b + 4 = 0 \\ 8 + 12(a + b) + 10ab \neq 0 \end{cases}$$

由 $\begin{cases} 5a^2 + 12a + 4 = 0 \\ 5b^2 + 12b + 4 = 0 \end{cases}$ 可以解得 $\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$，$\begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$，$\begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$，$\begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -2 \end{cases}$。可是其中的 $\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$ 代入 $8 + 12(a + b) + 10ab$ 中会使得 $8 + 12(a + b) + 10ab = 0$，所以舍弃 $\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$，$\begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$，取 $\begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$，$\begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -2 \end{cases}$。

(20)(本题满分 11 分)

计算二重积分 $I = \iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，其中 $D = \{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant\sec\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\}$。

**解：** 本题是计算二重积分 $\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，这个二重积分很明显是以极坐标来表示的。但是，我们从被积函数的形式就可以直观地感觉到，如果真的采用极坐标系法来计算，计算量将会非常大，所以要把这个以极坐标表示的二重积分转化为以直角坐标表示的二重积分，然后在直角坐标系下进行计算。

转化的主要是两项：一是被积函数，二是积分区域。

先来转化被积函数。

原被积函数是 $r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}$，先将其变为 $r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$。由于 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，所以很明显被积函数转化后应该是 $y\sqrt{1-x^2+y^2}$。

这时，可能有些同学会表示不理解，他们可能会认为 $y\sqrt{1-x^2+y^2}$ 对应的应该是 $r\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$ 而不是 $r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$。其实，当我们把直角坐标转化为极坐标时，被积函数中要多乘以一个 $r$，既然如此，那么当我们把极坐标转化为直角坐标时，被积函数中多乘的那个 $r$ 自然就不用管了。

再来转化积分区域。

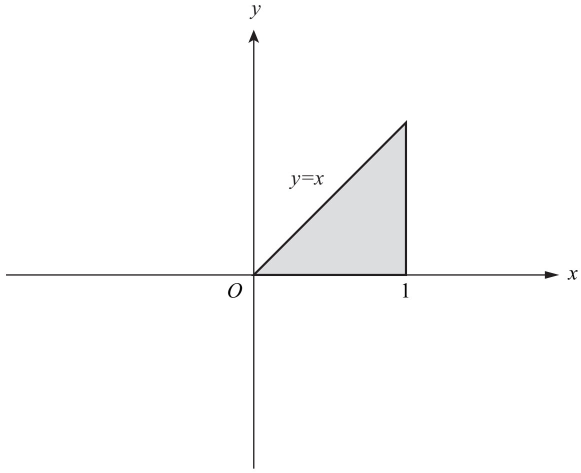
已知 $D = \{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant\sec\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\}$，可以看出：在直角坐标系下，$D$ 是由 $y=0$，$y=x$，$x=1$ 所围成的。

提示：为了验证转化的是否正确，可以在平面直角坐标系中画出由 $y=0$，$y=x$，$x=1$ 所围成的图形，然后转化为极坐标，看看是否有 $0\leqslant r\leqslant\sec\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$(这留给大家自己去完成)。

现在，题中所给的以极坐标表示的二重积分已经被转化为以直角坐标表示的二重积分：$\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 是由 $y=0$，$y=x$，$x=1$ 所围成的。

下面就是纯计算。

首先，在平面直角坐标系中画出积分区域 $D$，如下图所示。




通过上图，可以轻易确定 $x$ 和 $y$ 的积分上下限，即

$$\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}y \tag{1}$$

通过计算可知

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{3}-\frac{\pi}{16} \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}-\frac{\pi}{16} \tag{3}$$

由于

$$\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

所以(3)式、(4)式相结合，得

$$\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}-\frac{\pi}{16} \tag{5}$$

(21)（本题满分11分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$。证明：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$，$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$。

**解：** 由于 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$ 可以整理为 $[f'(\xi)-\xi^2]+[f'(\eta)-\eta^2]=0$，可以看出 $[f(x)-\frac{1}{3}x^3]'\Big|_{x=\xi}=f'(\xi)-\xi^2$，$[f(x)-\frac{1}{3}x^3]'\Big|_{x=\eta}=f'(\eta)-\eta^2$，所以自然会联想到设辅助函数为 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$。

然后，在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 上对 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$ 使用拉格朗日中值定理。

由拉格朗日中值定理可知：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$，使得

$$\frac{F(\frac{1}{2})-F(0)}{\frac{1}{2}-0}=F'(\xi) \tag{1}$$

由于 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，所以

$$\frac{F(\frac{1}{2})-F(0)}{\frac{1}{2}-0}=\frac{f(\frac{1}{2})-\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3}{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

由于 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，所以

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\xi^2 \tag{3}$$

将(2)式、(3)式代入(1)式，得

$$\frac{f(\frac{1}{2})-\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3}{\frac{1}{2}}=f'(\xi)-\xi^2 \tag{4}$$

在区间 $[\frac{1}{2},1]$ 上对 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$ 使用拉格朗日中值定理。

由拉格朗日中值定理可知：存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得

$$\frac{F(1)-F(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=F'(\eta) \tag{5}$$

由于 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，所以

$$\frac{F(1)-F(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=\frac{-[f(\frac{1}{2})-\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3]}{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

由于 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，所以

$$F'(\eta)=f'(\eta)-\eta^2 \tag{7}$$

将(6)式、(7)式代入(5)式，得

$$\frac{-\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]}{\frac{1}{2}}=f'(\eta)-\eta^{2} \tag{8}$$

最后，把(4)式和(8)式的等式左右两侧分别相加，得

$$f'(\xi)-\xi^{2}+f'(\eta)-\eta^{2}=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{\frac{1}{2}}+\frac{-\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]}{\frac{1}{2}}=0 \tag{9}$$

将(9)式整理，可得

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^{2}+\eta^{2} \tag{10}$$

(22)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$。已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 存在 2 个不同的解。

(Ⅰ)求 $\lambda$、$a$；

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的通解。

**解：**本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 存在 2 个不同的解，由于 $\vec{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，所以显然线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 是一个非齐次方程组。

我们知道，非齐次方程组的解一共有三种类型：无解、有唯一的一组解、有无穷多组解。已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 存在 2 个不同的解，这就意味着非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多组解。

非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的方程个数很显然等于未知数的个数(因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个方阵)，所以可以使用克拉默法则：

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一的一组解。

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多组解或无解。

而前面已经推出非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多组解，根据克拉默法则可得 $|\boldsymbol{A}|=0$。

已知说矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$ 就意味着 $\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0$，解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$。但是这里必须舍去一个 $\lambda$，因为 $|\boldsymbol{A}|=0$ 对应着非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多组解或无解，也就是说，其中一个 $\lambda$ 对应非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多组解，另一个 $\lambda$ 对应非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 无解。因为非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多组解，所以要舍去一个 $\lambda$。那么究竟应该舍去 $\lambda=1$ 还是 $\lambda=-1$ 呢？

若 $\lambda=1$，则非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 所对应的矩阵形式为 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，它化为的阶梯型矩阵是 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以很显然有 $r(\boldsymbol{A})=1$，$r(\boldsymbol{A}\mid\vec{b})=2$，即 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\mid\vec{b})$，所以当 $\lambda=1$ 时，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 无解。所以应该舍去 $\lambda=1$，而取 $\lambda=-1$。

现在第(Ⅰ)问做完了吗？还没有。第(Ⅰ)问是求 $\lambda$ 和 $a$，现在只求出了 $\lambda=-1$，接下来求 $a$。

由于 $\lambda=-1$，所以非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 所对应的矩阵形式为 $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，它化为阶梯型矩阵是 $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{pmatrix}$。由于非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多组解，所以必有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\vec{b})$。显然 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以必有 $r(\boldsymbol{A}\mid\vec{b})=2$。由此可得 $a+2=0$，即 $a=-2$。

于是第(Ⅰ)问就解答完毕，$\lambda=-1$，$a=-2$。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的通解，由于已经求出了 $\lambda$ 和 $a$，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 中已经不含参数了，所以第(Ⅱ)问很简单，我们只需要按照求解非齐次方程组通解的步骤来做就可以了。

鉴于一部分同学忘记了求解非齐次方程组通解的步骤，下面来复习一下。

(1)写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩 $r_1$、$r_2$。

(2) 判断解的类型。

① 若 $r_1 \neq r_2$，则该非齐次方程组无解。

② 若 $r_1 = r_2$ 且 $r_1 = r_2 = n$（未知数个数），则该非齐次方程组有唯一的解，不用再进行步骤(3)。

③ 若 $r_1 = r_2$ 且 $r_1 = r_2 < n$（未知数个数），则该非齐次方程组有无穷多解，需要进行步骤(3)。

(3) 先当成对应的齐次方程组，按齐次方程组的步骤(3)求出齐次方程组的通解。然后再还原成非齐次方程组，令自由未知数取全零，求出非齐次方程组的一个特解。最后，用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解，得到的就是非齐次方程组的通解。

大家按照这三个步骤就可以求出非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$ 的通解本题中，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$ 的通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 $k$ 为任意常数。

(23)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵。若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，求 $a$、$\boldsymbol{Q}$。

**解**：本题有两问，第一问是求 $a$，第二问是求矩阵 $\boldsymbol{Q}$。

先来看第一问。

矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$。由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵。

对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而言，有 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$。我们知道，这叫“实对称矩阵 $A$ 合同于对角矩阵”。

那么，$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 该如何求呢？有两种方法：一是“特征向量单位正交化来求 $\boldsymbol{Q}$，通过求特征值来求 $\boldsymbol{\Lambda}$”，二是“配方法”。

已知矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，所以 $Q$ 是通过“特征向量单位正交化（而不是通过配方法）”

来求的。

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，那么很明显向量 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 是特征值 $\lambda_1$ 所对应的特征向量。

下面告诉大家一个定理：若向量 $\vec{\xi}$ 是特征值 $\lambda$ 所对应的特征向量，则向量 $k\vec{\xi}(k\neq 0)$ 肯定也是特征值 $\lambda$ 所对应的特征向量。

所以可知 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 是特征值 $\lambda_1$ 所对应的特征向量。

根据特征值、特征向量的定义式有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$。

把 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 按照矩阵乘法法则展开

$$\begin{cases}0+(-2)+4=\lambda_1\\ -1+6+a=2\lambda_1\\ 4+2a+0=\lambda_1\end{cases}$$

解得 $a=-1$，$\lambda_1=2$。

再来看第二问。

要求矩阵 $Q$，先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值。由于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，而 $a=-1$，所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -4\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ -4 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$。令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，则有 $(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4)=0$，解得 $\begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_2=5\\ \lambda_3=-4\end{cases}$。

接下来分别求一下每个特征值所对应的特征向量(其实求解特征向量的方法就是解齐次线性方程组的方法)。

通过计算可知，特征值 $\lambda_1=2$ 所对应的所有特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(k_1\neq 0)$，特征值 $\lambda_2=5$ 所对应的所有特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(k_2\neq 0)$，特征值 $\lambda_3=-4$ 所对应的所有特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}(k_3\neq 0)$。

现在从特征值 $\lambda_1=2$ 所对应的无数个特征向量中选一个，不妨选 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$；从特征值 $\lambda_2=5$ 所对应的无数个特征向量中选一个，不妨选 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$；再从特征值 $\lambda_3=-4$ 所对应的无数个特征向量中选一个，不妨选 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$。

然后把向量 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 单位正交化。由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，而对称矩阵不同特征值所对应的特征向量本来就是正交的，所以不用进行“正交化”了，只需进行“单位化”即可。

$$\overrightarrow{a_1}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$。

# 2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题及精解

## 一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为(　　)。

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 无穷多个

**解**：我们知道，函数 $y=\sin\pi x$ 在 $x=0$，$\pm1$，$\pm2$，$\pm3$，$\cdots$ 处的函数值是0，而在分数中，0 是不能做分母的，所以 $x=0$，$\pm1$，$\pm2$，$\pm3$，$\cdots$ 都是函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的间断点。也就是说，函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的间断点有无数个。

本题是求函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数，下面就来看一下在这无数个间断点中有几个是可去间断点。

进行如下计算。

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\infty$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\infty$$

$$\lim_{x\to-3}f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\infty$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\infty$$

⋮

由以上计算可知，函数$f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数为3(分别是$x=0$，$x=-1$，$x=1$)，所以本题应该选择(C)选项。

(2)当$x\to0$时，$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则(　　)。

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

**解**：由于$f(x)=x-\sin ax$，$g(x)=x^2\ln(1-bx)$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}\tag{1}$$

由等价无穷小可知，当$x\to0$时，$\ln(1-bx)$和$-bx$是等价无穷小，所以(1)式可以化为

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\times(-bx)}\tag{2}$$

(2)式可以化简为

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}\tag{3}$$

(1)式、(3)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}\tag{4}$$

由于$\lim\limits_{x\to0}(x-\sin ax)=0$，$\lim\limits_{x\to0}(-bx^3)=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin ax}{-bx^3}$属于“$\dfrac{0}{0}$型”的函数极限计算题，可以对$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin ax}{-bx^3}$使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\tag{5}$$

(4)式、(5)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\tag{6}$$

已知当$x\to0$时，$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小，所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1\tag{7}$$

(6)式、(7)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=1 \tag{8}$$

下面给大家介绍一个定理：

在“$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$ 非零常数 $C$”的前提下：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$；若 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$。

由于(8)式的等式右侧是非零常数1，又 $\lim\limits_{x\to 0}(-3bx^2)=0$，所以根据上述定理可知 $\lim\limits_{x\to 0}(1-a\cos ax)=0$，由此可以解得 $a=1$。

把 $a=1$ 代入(8)式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=1 \tag{9}$$

由等价无穷小可知，当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 和 $\dfrac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小，所以(9)式可以化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}=1 \tag{10}$$

(10)式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{-3b}=1 \tag{11}$$

由于 $\dfrac{\frac{1}{2}}{-3b}$ 是常数，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{-3b}=\frac{\frac{1}{2}}{-3b} \tag{12}$$

(11)式、(12)式相结合，得

$$\frac{\frac{1}{2}}{-3b}=1 \tag{13}$$

由(13)式可以解得 $b=-\dfrac{1}{6}$。

现在已经计算出了 $a=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$，所以本题应该选择(A)选项。

(3)设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，则点 $(0,0)$(　　)。

(A)不是 $f(x,y)$ 的连续点　　(B)不是 $f(x,y)$ 的极值点

(C)是 $f(x,y)$ 的极大值点　　(D)是 $f(x,y)$ 的极小值点

**解**：我们知道，$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$。因为 $dz = xdx + ydy$，所以可知 $\frac{\partial z}{\partial x} = x$，$\frac{\partial z}{\partial y} = y$。

现在已经计算出了 $\frac{\partial z}{\partial x} = x$，$\frac{\partial z}{\partial y} = y$，由此可知点 $(x, y) = (0, 0)$ 是驻点(也就是可能极值点)。

由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = x$，$\frac{\partial z}{\partial y} = y$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$$

把驻点 $(0, 0)$ 代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 中，得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = 1$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = 1$$

注：这非常好理解，因为 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 都是常数，所以无论代哪个点进入，值都是1、0、1。

由以上分析可知 $A = 1$、$B = 0$、$C = 1$。

由于 $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$，所以 $(0, 0)$ 是极值点并且是极小值点，本题应该选择(D)选项。

(4)设函数 $f(x, y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y)dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y)dx = ($　　$)$。

(A) $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y)dy$　　(B) $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y)dy$

(C) $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y)dx$　　(D) $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y)dx$

**解**：本题的问题拆为以下两个小问。

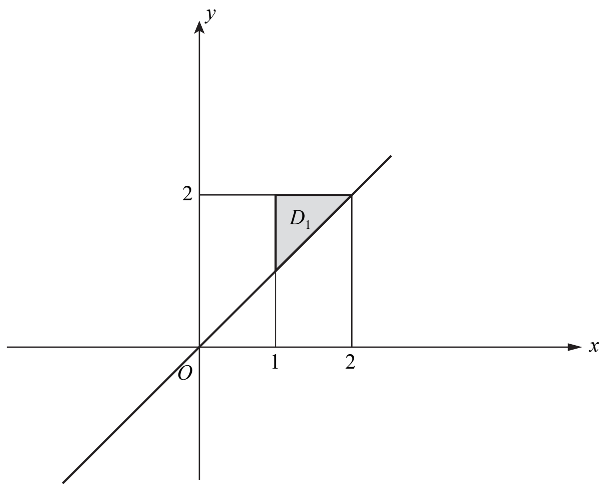
第一小问：已知 $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ 可以写为 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y)dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y)dx$，请在平面直角坐标系中画出积分区域 $D$。

第二小问：根据画出的积分区域 $D$，确定到底应该选择哪个选项。

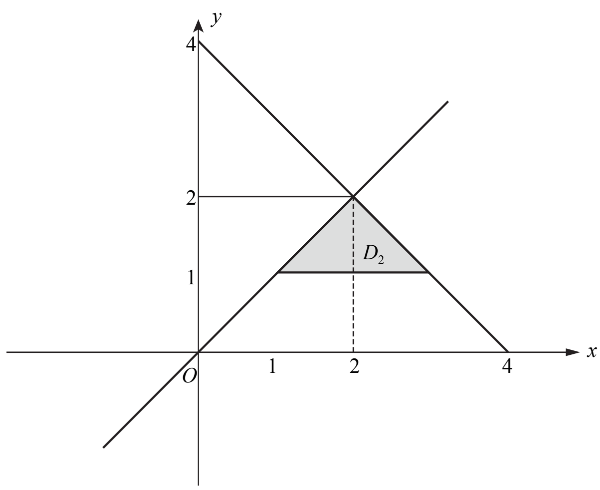
这样本题的思路就清晰多了。

先来看第一小问。

已知$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^2 f(x, y)\mathrm{d}y$，所以区域 $D_1$ 为由 $x = 1$、$x = 2$、$y = x$、$y = 2$ 所围成的区域，如下图所示。



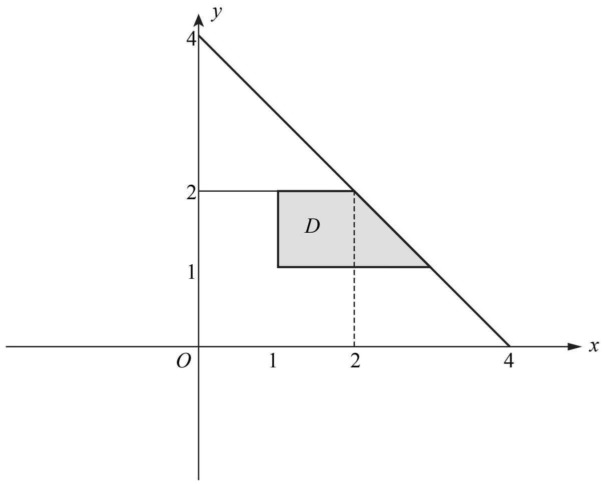

又有$\int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^{4-y} f(x, y)\mathrm{d}x$，所以区域 $D_2$ 为由 $y = 1$、$y = 2$、$x = y$、$x = 4 - y$ 所围成的区域，如下图所示。




在平面直角坐标系中已经画出了 $D_1$ 与 $D_2$，那么 $D_1$ 与 $D_2$ 合并在一起就是积分区域 $D$，如下图所示。

再来看第二小问。

由于积分区域 D 的纵坐标的最大值为 2，最小值为 1。画一条平行于 $x$ 轴且与区域 $D$ 相交的直线，会发现 $x$ 值小的那个点始终落在 $x = 1$ 上，$x$ 值大的那个点始终落在 $x = 4 - y$ 上，由此可知本题应该选择(C)选项。




(5)若$f''(x)$不变号，且曲线$y=f(x)$在点$(1,1)$处的曲率圆为$x^2+y^2=2$，则函数$f(x)$在区间$(1,2)$内(　　)。

(A)有极值点，无零点　　(B)无极值点，有零点

(C)有极值点，有零点　　(D)无极值点，无零点

**解**：由于$x^2+y^2=2$，等式两侧对$x$求导，有

$2x+2yy'=0$

由于$x^2+y^2=2$，所以当$x=1$时，$y=1$。把$x=1$，$y=1$代入$2x+2yy'=0$中，可以解得$y'(1)=-1$。

由于$2x+2yy'=0$，等式两侧对$x$求导，有

$2+2(y'\times y'+y''\times y)=0$

把$x=1$、$y=1$、$y'(1)=-1$代入$2+2(y'\times y'+y''\times y)=0$中，可以解得$y''(1)=-2$。

已知$x^2+y^2=2$是曲线$y=f(x)$在点$(1,1)$处的曲率圆，我们知道，某曲线在某点处的曲率圆与该曲线在该点具有相同的一阶导数和二阶导数，所以由前面求得的$y'(1)=-1$和$y''(1)=-2$，可知$f'(1)=-1$和$f''(1)=-2$。

由于$f''(1)=-2$，所以$f''(1)<0$。已知$f''(x)$不变号，所以在区间$[1,2]$内都有$f''(x)<0$。这说明在区间$[1,2]$内$f'(x)$单调递减。

又因为$f'(1)=-1<0$，所以有：在区间$[1,2]$内，$f'(x)<0$。这说明在区间$[1,2]$内$f(x)$单调递减。

那么函数$f(x)$在区间$[1,2]$内可能有极值点吗？必然不可能。因为极值点是单调递增和单调递减区间的分界点，而在区间$[1,2]$内$f(x)$是单调递减的，根本无法分界，所以在区间$[1,2]$内，$f(x)$没有极值点。于是(A)选项和(C)选项就可以排除了。

接下来看函数 $y=f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有没有零点。

由于在区间 $[1,2]$ 内 $f''(x)<0$，所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 内是凸函数。

下面告诉大家一个与凸函数有关的性质：

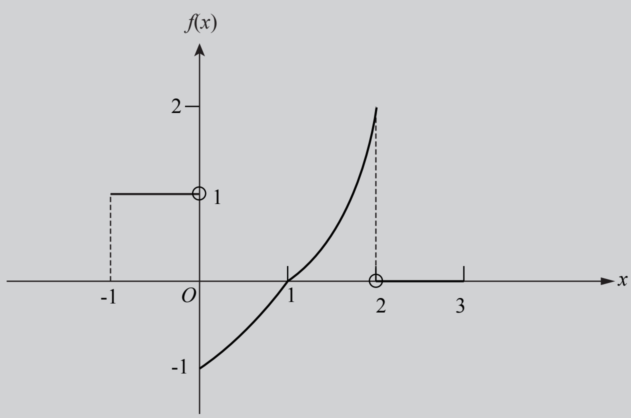
如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是凸函数，则对任意来自区间 $[a,b]$ 中的两个不同的点 $x$、$x_0$，必有 $f(x)<f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$。

取 $x=2$，$x_0=1$，可得 $f(2)<f'(1)(2-1)+f(1)=-1(2-1)+1=0$。

已知函数 $y=f(x)$ 过点 $(1,1)$，即 $f(1)=1$，所以 $f(1)>0$。

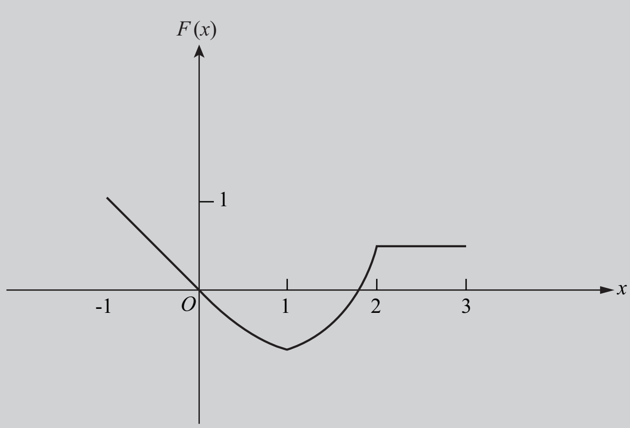
由于 $f(1)>0$，$f(2)<0$，所以在区间 $[1,2]$ 上使用零点定理，可知函数 $y=f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 有零点。所以本题应该选择(B)选项。

(6)设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为

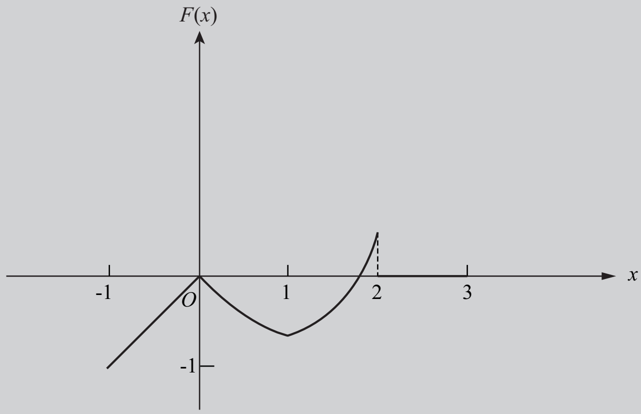



则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的图形为(　　)。

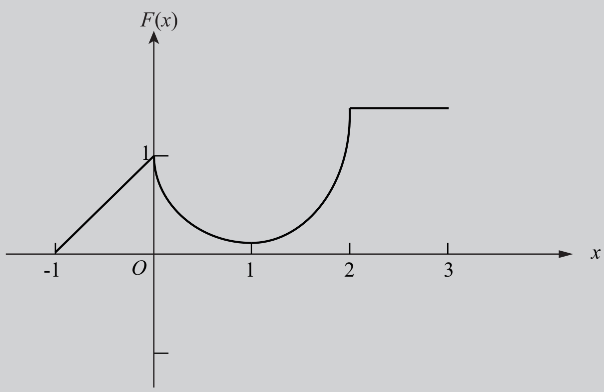
(A)



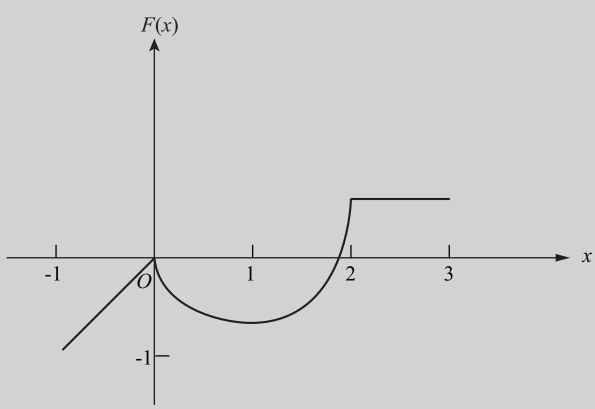
(B)




(C)



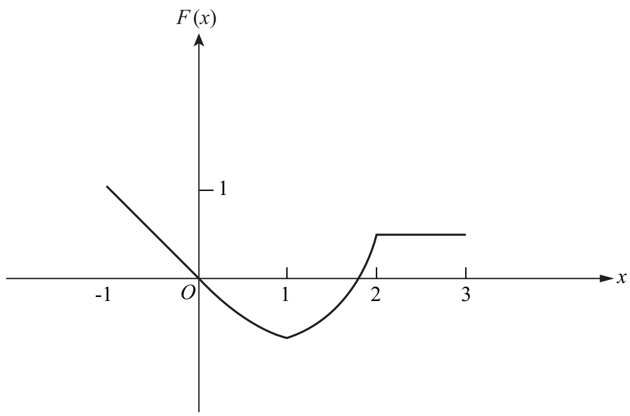

(D)



**解**：在正式开始解答本题之前，大家要知道 $F'(x)=f(x)$。本题采用排除法来解答。

先来看(A)选项。

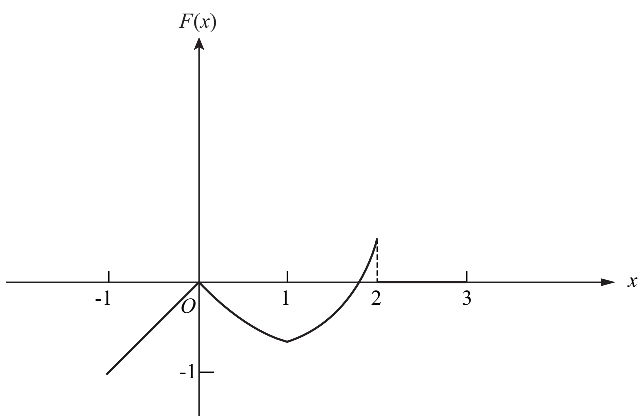
(1)选项的图是




(A)选项给的这个图在区间 $(-1,0)$ 上是单调递减的。

而函数 $f(x)$（也就是 $F(x)$ 的导函数)在区间 $(-1,0)$ 上是大于 0 的，这就说明函数 $F(x)$ 在 $(-1,0)$ 上应该是单调递增的，所以(A)选项错误。

(B)选项的图是

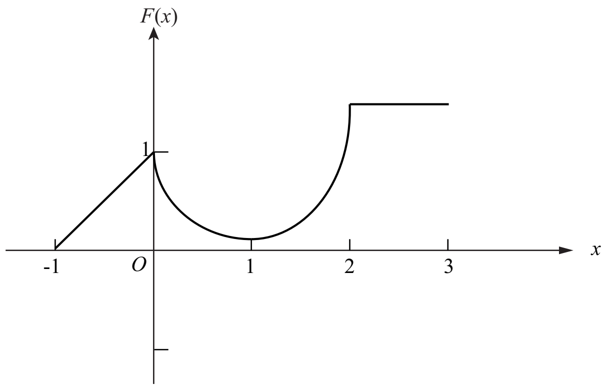



从图中可以明显看出，该函数在 $x=2$ 处不连续(极限值 $\neq$ 函数值)，由此可以把(B)选项排除。因为不连续就肯定不可导，而函数 $F(x)$ 是可导的。所以(B)选项错误。

(C)选项的图是

从图中可以明显看出，$F(1)=1$。可是 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，所以 $F(0)$ 应该等于 0，(C)选项错误。

综上所述，本题应该选择(D)选项。




(7)设$A$、$B$均为2阶矩阵，$A^*$、$B^*$分别为$A$、$B$的伴随矩阵。若$|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$的伴随矩阵为(　　)。

(A)$\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　　(B)$\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　　(D)$\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

**解**：由于$A$、$B$均为2阶矩阵，所以分块矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$肯定是一个方阵(行数等于列数)必定有对应的行列式，所以先在来计算一下方阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$所对应的行列式$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}$的值。

怎么计算呢？就用下面两组公式：

$$\begin{vmatrix} A_{n\times n} & O \\ O & B_{m\times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n\times n} & C \\ O & B_{m\times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n\times n} & O \\ C & B_{m\times m} \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

由第二组公式可知：

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 2} \times |A| \times |B| = 6$$

由于方阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$所对应的行列式$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}$不等于0，说明方阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$是可逆矩阵。

由此可知，对于可逆矩阵$A$，必有$A^* = |A| \times A^{-1}$。所以对于矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$有

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} \tag{1}$$

前面已经计算出 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = 6$，代入(1)式，得

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = 6\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} \tag{2}$$

接下来计算 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$，利用如下定理：

设 $A = \begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$，其中 $A_1$、$A_2$ 都是矩阵 $A$ 的子矩阵，且是方阵。矩阵 $O$ 也是矩阵 $A$ 的子矩阵，但不一定是方阵，矩阵 $O$ 中的每一个数均为 0。若 $|A| \neq 0$，则 $A$ 可逆。

由以上定理可知

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \tag{3}$$

将(3)式代入(2)式，得

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = 6\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \tag{4}$$

而

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^* = \frac{1}{2}A^* \tag{5}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \times B^* = \frac{1}{3}B^* \tag{6}$$

将(5)式、(6)式代入(4)式中，得

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = 6\begin{pmatrix} O & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & O \end{pmatrix} \tag{7}$$

(7)式可以化简为

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix} \tag{8}$$

所以本题应该选择(B)选项。

(8)设 $A$、$P$ 均为3阶矩阵，$P^{\mathrm{T}}$ 为 $P$ 的转置矩阵，且 $P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。若 $P=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})$，$Q=(\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})$，则 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为(　　)。

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

**解**：由于 $Q=(\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})$，所以可以将矩阵 $Q$ 写为 $Q=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。已知 $P=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3})$，所以有 $Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

由此可得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=[P\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]^{\mathrm{T}}\times A\times[P\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]$$

根据公式 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$，上式可以变为

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=[P\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]^{\mathrm{T}}\times A\times[P\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\times P^{\mathrm{T}}\times A\times P\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

矩阵的乘法具有结合律，所以有

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=[P\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]^{\mathrm{T}}\times A\times[P\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\times P^{\mathrm{T}}\times A\times P\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times (\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{P}) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

已知 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

接下来利用矩阵乘法算出这三个矩阵的乘积就可以了。不过要提示大家一点，由于最左侧的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和最右侧的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 都是初等矩阵，所以用如下方法来求会比较方便：

首先需要求 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。由于 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的第 2 行乘以 1 加到第 1 行得到的，所以将 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的第 2 行乘以 1 加到第 1 行就是 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。

所以

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是单位矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的第 2 列乘以 1 加到第 1 列得到的，所以将$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$的第 2 列乘以 1 加到第 1 列就是$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，所以$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，本题应该选择(A)选项。

## 二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9)曲线$\begin{cases}x=\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\\y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$在点 (0, 0) 处的切线方程为________。

**解**：曲线$\begin{cases}x=\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\\y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$在点 (0, 0) 处的切线方程为 $y-0=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}(x-0)$，所以要求出$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

对于$\begin{cases}x=\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\\y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\times\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\times\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{2t\ln(2-t^2)-\frac{t^2\cdot 2t}{2-t^2}}{-\mathrm{e}^{-(1-t)^2}}$。

由于当 $x=0$ 时，$t=1$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{2t\ln(2-t^2)-\frac{t^2\cdot 2t}{2-t^2}}{-\mathrm{e}^{-(1-t)^2}}\right|_{t=1}=2$。

所以曲线在 (0, 0) 处的切线方程为 $y-0=2(x-0)$，化简得 $y=2x$。

所以本题应填 $y=2x$。

(10)已知$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x=1$，则 $k=$ ________。

**解**：由于积分上下限是对称的，而被积函数 $\mathrm{e}^{k|x|}$ 是偶函数，根据定积分的对称性可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x \tag{1}$$

由于$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x$的被积函数中的$\mathrm{e}^{k|x|}$中的$x$是在$(0,+\infty)$内取值，所以有

$$2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x \tag{3}$$

$2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$很明显可以写为

$$2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x=\frac{2}{k}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}(kx) \tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x=\frac{2}{k}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}(kx) \tag{5}$$

很显然有

$$\frac{2}{k}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}(kx)=\frac{2}{k}\times\left(\mathrm{e}^{kx}\Big|_{0}^{+\infty}\right) \tag{6}$$

(5)式、(6)式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x=\frac{2}{k}\times\left(\mathrm{e}^{kx}\Big|_{0}^{+\infty}\right) \tag{7}$$

已知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x=1 \tag{8}$$

(7)式、(8)式相结合，得

$$\frac{2}{k}\times\left(\mathrm{e}^{kx}\Big|_{0}^{+\infty}\right)=1 \tag{9}$$

可以肯定，$k$一定小于0(因为如果$k$大于0的话，那么答案不可能是1，而是$\infty$)。

很明显有

$$\frac{2}{k}\times\left(\mathrm{e}^{kx}\Big|_{0}^{+\infty}\right)=\frac{2}{k}\times\left(\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{kx}-\mathrm{e}^{0}\right)=\frac{2}{k}\times(0-1)=-\frac{2}{k} \tag{10}$$

(9)式、(10)式相结合，得

$$-\frac{2}{k}=1 \tag{11}$$

由(11)式可解得$k=-2$。

所以本题应填$-2$。

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx\,dx=$ ________。

**解**：先来计算 $\int e^{-x}\sin nx\,dx$。

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin nx\,dx&=-\int\sin nx\,d(e^{-x})\\&=-e^{-x}\sin nx+n\int e^{-x}\cos nx\,dx\\&=-e^{-x}\sin nx-n\int\cos nx\,d(e^{-x})\\&=-e^{-x}\sin nx-ne^{-x}\cos nx-n^2\int e^{-x}\sin nx\,dx\end{aligned}$$

由此可得

$$\int e^{-x}\sin nx\,dx=-\frac{(\sin nx+n\cos nx)e^{-x}}{n^2+1}+C$$

那么就必有

$$\int_0^1 e^{-x}\sin nx\,dx=-\frac{(\sin nx+n\cos nx)e^{-x}}{n^2+1}\bigg|_0^1=-\frac{(\sin n+n\cos n)e^{-1}}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx\,dx=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{(\sin n+n\cos n)e^{-1}}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}\right]=0$$

所以本题应填0。

(12)设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________。

**解**：本题的解题思路非常明显，可以分为三个步骤：一是求出 $\dfrac{dy}{dx}$，二是求出 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，三是求出最终的 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$。

先来求 $\dfrac{dy}{dx}$。

已知 $xy+e^y=x+1$，将等式左右两侧同时对 $x$ 求导，得

$$y+\frac{dy}{dx}x+e^y\frac{dy}{dx}=1$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y}{x+e^y}$$

再来求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1-y}{x+\mathrm{e}^y}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x+\mathrm{e}^y)-\left(1+\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)(1-y)}{(x+\mathrm{e}^y)^2}$$

将$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-y}{x+\mathrm{e}^y}$代入$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x+\mathrm{e}^y)-(1+\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})(1-y)}{(x+\mathrm{e}^y)^2}$中，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{y-1-(1+\frac{\mathrm{e}^y(1-y)}{x+\mathrm{e}^y})(1-y)}{(x+\mathrm{e}^y)^2}$$

最后来求$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$。

由$xy+\mathrm{e}^y=x+1$可知，当$x=0$时，$y=0$。代入$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{y-1-(1+\frac{\mathrm{e}^y(1-y)}{x+\mathrm{e}^y})(1-y)}{(x+\mathrm{e}^y)^2}$中，解得

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=\frac{0-1-(1+\frac{\mathrm{e}^0(1-0)}{0+\mathrm{e}^0})(1-0)}{(0+\mathrm{e}^0)^2}=-3$$

所以本题应填$-3$。

(13)函数$y=x^{2x}$在区间$(0,1]$上的最小值为________。

**解**：先来求函数$y=x^{2x}$在区间$(0,1]$内的极值点。

由于极值点或者是驻点(一阶导函数为0的点)，或者是一阶导数没有定义的点，所以先求驻点和一阶导数没有定义的点。

先求驻点。$y=x^{2x}$可以改写为$y=\mathrm{e}^{2x\ln x}$，所以

$y'=\mathrm{e}^{2x}\times2(\ln x+1)$

令$y'=0$(即令$\mathrm{e}^{2x}\times2(\ln x+1)=0$)，解得$x=\frac{1}{\mathrm{e}}$。

驻点只有一个，即$x=\frac{1}{\mathrm{e}}$。

再来求一阶导数没有定义的点。前面已经求出$y'=\mathrm{e}^{2x}\times2(\ln x+1)$，很明显在区间$(0,1]$内，并不存在一阶导数没有定义的点。

综上所述，驻点和不可导点只有一个，即可能极值点只有一个。

现在要看看这个“可能极值点”到底是不是真正的极值点。

在区间 $(0,\frac{1}{e})$ 内任取一点，代入 $y'=e^{2x}\times2(\ln x+1)$ 中，发现小于0，这说明函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,\frac{1}{e})$ 内单调递减。

在区间 $(\frac{1}{e},1)$ 内任取一点，代入 $y'=e^{2x}\times2(\ln x+1)$ 中，发现大于0，这说明函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(\frac{1}{e},1)$ 内单调递增。

由此可知 $x=\frac{1}{e}$ 的确是极值点，而且是极小值点，它所对应的极小值为 $y(\frac{1}{e})=e^{-2e^{-1}}$。

原本应该求出端点值或端点的极限值，然后和求出的极值进行比较。然而本题不用这么麻烦，由于在区间 $(0,1]$ 上只求出了一个极值点，所以可以断定极小值 $e^{-2e^{-1}}$ 必定是函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值。

所以本题应填 $e^{-2e^{-1}}$。

(14)设 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 为3维列向量，$\vec{\beta}^{T}$ 为 $\vec{\beta}$ 的转置。若矩阵 $\vec{\alpha}\vec{\beta}^{T}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\vec{\beta}^{T}\vec{\alpha}=$ ________。

**解**：因为 $\vec{\beta}$ 是列向量，$\vec{\beta}^{T}$ 自然就是行向量，而 $\vec{\alpha}$ 是列向量，所以 $\vec{\beta}^{T}\vec{\alpha}$ 属于“行向量×列向量”，所以结果必然是一个数。现在就是想把这个数求出来。

由于矩阵 $\vec{\alpha}\vec{\beta}^{T}$ 和矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似，所以矩阵 $\vec{\alpha}\vec{\beta}^{T}$ 和矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 具有相同的特征值。

对于对角矩阵，其对角线上的数就是特征值，所以矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的三个特征值是2、0、0。

因为矩阵 $\vec{\alpha}\vec{\beta}^{T}$ 和矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 具有相同的特征值，所以矩阵 $\vec{\alpha}\vec{\beta}^{T}$ 的三个特征值也是2、0、0。

我们知道，一个矩阵所有特征值之和等于该矩阵的对角线上的所有数字之和，所以矩

阵$\vec{\alpha}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$的对角线上的所有数字之和为$2+0+0=2$。

设$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$,$\vec{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$,那么矩阵$\vec{\alpha}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$就为

$$\vec{\alpha}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times(b_1\quad b_2\quad b_3)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$$

所以矩阵$\vec{\alpha}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$的对角线上的数字之和为$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$。因为矩阵$\vec{\alpha}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$的对角线上的数字之和为2,所以有

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2 \tag{1}$$

由于$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$,$\vec{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$,所以矩阵$\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}$就为

$$\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}=(b_1\quad b_2\quad b_3)\times\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合,得

$$\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}=2 \tag{3}$$

所以本题应填2。

## 三、解答题:15~23小题,共94分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)(本题满分9分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$。

**解**:由等价无穷小替换原则,可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4} \tag{1}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}$很明显可以写为

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}\right] \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}\right] \tag{3}$$

很明显，$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}\right]$ 可以拆为

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2} \tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2} \tag{5}$$

由等价无穷小替换原则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2} \tag{6}$$

把(6)式代入(5)式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2} \tag{7}$$

由洛必达法则(分子分母同时求导)可计算出

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\frac{1}{2} \tag{8}$$

(7)式、(8)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \tag{9}$$

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$。

**解**：由分部积分公式 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ 可知

$$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)-\int x\mathrm{d}\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) \tag{1}$$

将 d 后面的 $\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)$ 对 $x$ 求导，但是只求外层导数，不求内层导数，则(1)式变为

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx = x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) - \int \frac{x}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}d\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) \tag{2}$$

d 后面加减的常数是可以去掉的，所以有

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx = x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) - \int \frac{x}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}d\sqrt{\frac{1+x}{x}} \tag{3}$$

令 $J = \int \frac{x}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}d\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则(3)式变为

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx = x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) - J \tag{4}$$

令 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$，而 $J = \int \frac{x}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}d\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则 $J$ 可以写为

$$J = \int \frac{\frac{1}{t^2-1}}{1+t}dt \tag{5}$$

(5)式可以变为

$$J = \int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)}dt \tag{6}$$

(6)式可以写为

$$J = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\times\frac{1}{t+1}\right]dt \tag{7}$$

(7)式可以拆为

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2}dt \tag{8}$$

(8)式可以进一步拆为

$$J = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2}dt \tag{9}$$

通过(9)式，可以计算出

$$J = \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1} + C \tag{10}$$

将(10)式中的 $t$ 换为 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}$ 得

$$J = \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right)} - \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1} + C \tag{11}$$

将(11)式代入(4)式，得

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx = x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) - \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right)} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1} + C \tag{12}$$

(17)(本题满分 10 分)

设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 $f$ 具有二阶连续偏导数，求 $dz$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

**解：**本题有两问，第一问是求 $dz$，第二问是求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

先来看第一问。

因为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$，所以现在要求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

已知 $z=f(x+y,x-y,xy)$，设 $u=x+y$，$v=x-y$，$w=xy$，所以有 $z=f(u,v,w)$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1{}'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2{}'\frac{\partial v}{\partial x}+f_3{}'\frac{\partial w}{\partial x}$$

由于 $u=x+y$，所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=1$。

由于 $v=x-y$，所以 $\frac{\partial v}{\partial x}=1$。

由于 $w=xy$，所以 $\frac{\partial w}{\partial x}=y$。

把 $\frac{\partial u}{\partial x}=1$，$\frac{\partial v}{\partial x}=1$，$\frac{\partial w}{\partial x}=y$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1{}'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2{}'\frac{\partial v}{\partial x}+f_3{}'\frac{\partial w}{\partial x}$ 中，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1{}'+f_2{}'+yf_3{}'$$

再来求 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1{}'\frac{\partial u}{\partial y}+f_2{}'\frac{\partial v}{\partial y}+f_3{}'\frac{\partial w}{\partial y}$$

由于 $u=x+y$，所以 $\frac{\partial u}{\partial y}=1$。

由于 $v = x - y$，所以 $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$。

由于 $w = xy$，所以 $\frac{\partial w}{\partial y} = x$。

把 $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$，$\frac{\partial v}{\partial y} = -1$，$\frac{\partial w}{\partial y} = x$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial y} = f_1{}'\frac{\partial u}{\partial y} + f_2{}'\frac{\partial v}{\partial y} + f_3{}'\frac{\partial w}{\partial y}$ 中，得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1{}' - f_2{}' + xf_3{}'$$

把 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1{}' + f_2{}' + yf_3{}'$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y} = f_1{}' - f_2{}' + xf_3{}'$ 代入 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 中，得

$$\mathrm{d}z = (f_1{}' + f_2{}' + yf_3{}')\mathrm{d}x + (f_1{}' - f_2{}' + xf_3{}')\mathrm{d}y$$

再来看第二问。

第二问求的是 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，即 $\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}$。前面已经求出了 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1{}' + f_2{}' + yf_3{}'$，所以只需要让 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 对 $y$ 求偏导即可。即

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} \\ &= [f''_{11} \times 1 + f''_{12} \times (-1) + f''_{13} \times x] + [f''_{21} \times 1 + f''_{22} \times (-1) + f''_{23} \times x] + \\ &\quad y[f''_{31} \times 1 + f''_{32} \times (-1) + f''_{33} \times x] \\ &= f'_3 + f''_{11} - f''_{22} + xyf''_{33} + (x + y)f''_{13} + (x - y)f''_{23}\end{aligned}$$

（18）（本题满分 11 分）

设非负函数 $y = y(x)(x \geqslant 0)$ 满足微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$。当曲线 $y = y(x)$ 过原点时，其与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成的平面区域 $D$ 的面积为 2，求 $D$ 绕 $y$ 轴旋转所得旋转体的体积。

**解：** $xy'' - y' + 2 = 0$ 很明显是一个二阶微分方程，不过不是常系数，而是变系数，而且是不显含 $y$ 的变系数。

采用降阶（令 $y' = P$）的方法，可以轻易求得微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$ 的通解是 $y = 2x + C_1x^2 + C_2$。

现在来确定 $C_1$ 和 $C_2$。

曲线 $y = y(x)$ 过原点，所以当 $x = 0$ 时，$y = 0$。代入 $y = 2x + C_1x^2 + C_2$ 中，可以解得 $C_2 = 0$，即 $y = 2x + C_1x^2$。

函数 $y = y(x)(x \geqslant 0)$ 与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成的平面区域 $D$ 的面积为 2，所以有

$$\int_0^1 [y(x) - 0]\mathrm{d}x = 2$$

把 $y=2x+C_1x^2$ 代入上式得

$$\int_0^1(2x+C_1x^2)\mathrm{d}x=2$$

由上式可以解得 $C_1=3$。

所以 $y=2x+3x^2$。

主题求的是 $D$ 绕 $y$ 轴旋转所得旋转体的体积，根据绕 $y$ 轴旋转的旋转体体积公式可得

$$V=2\pi\int_0^1 x(3x^2+2x)\mathrm{d}x=\frac{17}{6}\pi$$

(19)(本题满分 10 分)

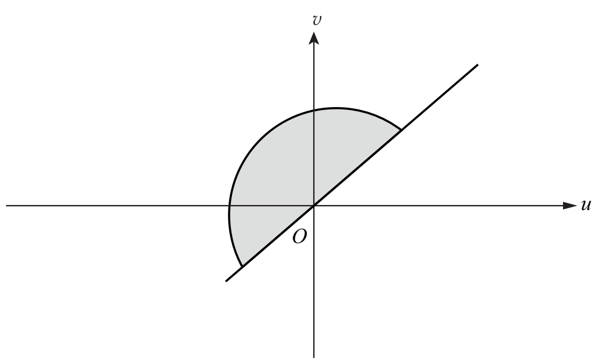
计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2,\ y\geqslant x\}$。

**解**：令 $u=x-1$，$v=y-1$。于是，$D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2,\ y\geqslant x\}$ 变成 $D_{uv}=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 2,\ v\geqslant u\}$，$\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 变成 $\iint\limits_{D_{uv}}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$。

综上所述，本题可以转化为“计算二重积分 $\iint\limits_{D_{uv}}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 $D_{uv}=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 2,\ v\geqslant u\}$”。

下面正式来计算。

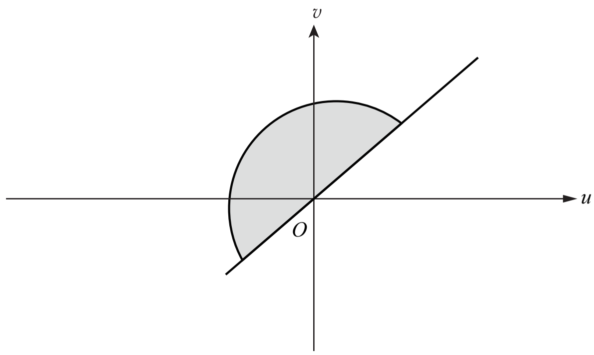
首先，在平面直角坐标系中画出积分区域 $D_{uv}=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 2,\ v\geqslant u\}$，如下图所示。




由于备积分区域是半圆，所以应该采用极坐标系法来计算该二重积分(当二重积分的积分区域是圆、半圆、$\frac{1}{4}$ 圆时，一般采用极坐标系法来计算)。

所以有 $\iint\limits_{D_{uv}}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_a^b\int_c^d(r\cos\theta-r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$。

积分区域 $D_{uv}=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 2,\ v\geqslant u\}$ 的图如下图所示。




很明显 $\theta$ 的积分下限和积分上限为 $a=\dfrac{\pi}{4}$，$b=\dfrac{5}{4}\pi$，$r$ 的积分下限和上限为 $c=0$，$d=\sqrt{2}$。

所以有 $\iint\limits_{D_{uv}}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}}(r\cos\theta-r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$。通过计算可知 $\iint\limits_{D_{uv}}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}}(r\cos\theta-r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=-\dfrac{8}{3}$。

（20）（本题满分 11 分）

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线。当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点；当 $0\leqslant x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$。求函数 $y(x)$ 的表达式。

**解**：本题分为“当 $-\pi<x<0$ 时”和“当 $0\leqslant x<\pi$”两种情况。

先来看当 $-\pi<x<0$ 时的情况。

当 $-\pi<x<0$ 时，很明显曲线 $y=y(x)$ 上任意点 $(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

注：其中 $(X,Y)$ 是法线上点的坐标。

曲线上任一点处的法线都过原点，所以 $(X,Y)=(0,0)$ 满足上式，于是有

$-y=\dfrac{x}{y'}$，整理得 $y\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x=0$，继续整理得 $\mathrm{d}(x^2+y^2)=0$。解得 $x^2+y^2=C$（因为只有 $\mathrm{d}C$ 才等于0）。

已知 $x=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, 由此可解得 $C=\pi^2$。所以有

$$y=\sqrt{\pi^2-x^2}\quad(-\pi<x\leqslant 0)$$

再来看当 $0\leqslant x<\pi$ 时的情况。

当 $0\leqslant x<\pi$ 时, 函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$。将 $y''+y+x=0$ 移项得 $y''+y=-x$, 这明显是一个二阶常系数非齐次微分方程。

可以求得这个二阶常系数非齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-x$$

由 $y=\sqrt{\pi^2-x^2}\quad(-\pi<x\leqslant 0)$ 可计算出 $y(0)=\pi$, $y'(0)=0$。把 $y(0)=\pi$, $y'(0)=0$ 代入 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x$ 中, 解得 $C_1=\pi$, $C_2=1$。所以有 $y=\pi\cos x+\sin x-x$。

综上所述有

$$y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

(Ⅱ)证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0,\delta)$ $(\delta>0)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$。

**解**: 本题有两问, 先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问要证明的是教材上的一个基本的定理: 拉格朗日中值定理。在讲解证明方法之前, 先告诉大家: 费马引理、罗尔定理、柯西中值定理、洛必达法则、积分中值定理这五个定理的证明大家一定要掌握, 因为考试中有可能直接让证明。

现在来证明。拉格朗日中值定理是: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

要想证明拉格朗日中值定理, 只需证明函数 $f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 在 $(a,b)$ 存在零点。而函数 $f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 是函数 $f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 的导函数。

为方便表示, 记函数 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$。很明显, 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导, 且 $F(a)=F(b)$, 根据罗尔定理, 可知存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$F'(x)=0$。

也就是说，函数 $F'(x)$ 存在零点。而 $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，所以 $f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 存在零点。

证毕。

再来看第(Ⅱ)问。

“$f'_+(0)$”指的是函数$f(x)$ 在 $x=0$ 处的右导数，根据“右导数的定义式”可知

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \tag{1}$$

(1)式可以化简为

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} \tag{2}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}[f(x)-f(0)]=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，所以可以对 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{1} \tag{3}$$

(3)式可以化简为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}f'(x) \tag{4}$$

(2)式、(4)式相结合，得

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f'(x) \tag{5}$$

已知

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=A \tag{6}$$

(5)式、(6)式相结合，得

$$f'_+(0)=A \tag{7}$$

(22)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\xi_1}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$。

(Ⅰ)求满足 $\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_2}=\overrightarrow{\xi_1}$，$\boldsymbol{A}^2\overrightarrow{\xi_3}=\overrightarrow{\xi_1}$ 的所有向量 $\overrightarrow{\xi_2}$、$\overrightarrow{\xi_3}$；

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\overrightarrow{\xi_2}$、$\overrightarrow{\xi_3}$，证明 $\overrightarrow{\xi_1}$、$\overrightarrow{\xi_2}$、$\overrightarrow{\xi_3}$ 线性无关。

**解：** 本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

先求$\overrightarrow{\xi_2}$。

已知$A\overrightarrow{\xi_2}=\overrightarrow{\xi_1}$，这也就意味着，求出非齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{x}=\overrightarrow{\xi_1}$的通解就是$\overrightarrow{\xi_2}$。

鉴于一部分同学忘记了求解非齐次方程组通解的步骤，下面给大家复习一下。

(1)写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩$r_1$、$r_2$。

(2)判断解的类型。

① 若$r_1\neq r_2$，则该非齐次方程组无解。

② 若$r_1=r_2$且$r_1=r_2=n$(未知数个数)，则该非齐次方程组有唯一的解，不用再进行步骤(3)了。

③ 若$r_1=r_2$且$r_1=r_2<n$(未知数个数)，则该非齐次方程组有无穷多解，需要进行步骤(3)。

(3)先当成对应的齐次方程组，按齐次方程组的步骤(3)求出齐次方程组的通解。然后再还原成非齐次方程组，令自由未知数取全零，求出非齐次方程组的一个特解。最后，用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解，得到的就是非齐次方程组的通解。

按照这三个步骤就可以求出非齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{x}=\overrightarrow{\xi_1}$的通解。计算可得：非齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{x}=\overrightarrow{\xi_1}$的通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，其中$t$为任意常数。所以$\overrightarrow{\xi_2}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，其中$t$为任意常数。

再来求$\overrightarrow{\xi_3}$。

用同样的方法可求得：非齐次方程组$\boldsymbol{A}^2\vec{x}=\overrightarrow{\xi_1}$的通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，其中$u$，$v$为任意常数。所以$\overrightarrow{\xi_3}=u\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，其中$u$，$v$为任意常数。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问要求证明$\overrightarrow{\xi_1}$、$\overrightarrow{\xi_2}$、$\overrightarrow{\xi_3}$线性无关。先写出以下式子：

$$k_1\overrightarrow{\xi_1}+k_2\overrightarrow{\xi_2}+k_3\overrightarrow{\xi_3}=\vec{0} \tag{1}$$

由线性无关的定义可知，只要能证明仅当$k_1$、$k_2$、$k_3$全为0时(1)式成立，就说明$\overrightarrow{\xi_1}$、$\overrightarrow{\xi_2}$、$\overrightarrow{\xi_3}$线性无关。

下面开始证明。

将(1)式的等式左右两侧左乘矩阵$\boldsymbol{A}$得

$$k_1\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_1}+k_2\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_2}+k_3\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_3}=\boldsymbol{A}\vec{0} \tag{2}$$

而

$$\boldsymbol{A}\vec{0}=\vec{0} \tag{3}$$

(1)式、(3)式相结合，得

$$k_1\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_1}+k_2\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_2}+k_3\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_3}=\vec{0} \tag{4}$$

已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\xi_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，根据矩阵的乘法法则可以计算出

$$\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_1}=\vec{0} \tag{5}$$

(4)式、(5)式相结合，得

$$k_1\times\vec{0}+k_2\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_2}+k_3\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_3}=\vec{0} \tag{6}$$

(6)式可以化简为

$$k_2\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_2}+k_3\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_3}=\vec{0} \tag{7}$$

已知

$$\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_2}=\overrightarrow{\xi_1} \tag{8}$$

(7)式、(8)式相结合，得

$$k_2\overrightarrow{\xi_1}+k_3\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_3}=\vec{0} \tag{9}$$

将(9)式的等式左右两侧左乘矩阵$A$得

$$k_2\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_1}+k_3\boldsymbol{A}^2\overrightarrow{\xi_3}=\boldsymbol{A}\vec{0} \tag{10}$$

而

$$\boldsymbol{A}\vec{0}=\vec{0} \tag{11}$$

(10)式、(11)式相结合，得

$$k_2\boldsymbol{A}\overrightarrow{\xi_1}+k_3\boldsymbol{A}^2\overrightarrow{\xi_3}=\vec{0} \tag{12}$$

而由(5)式可知$\overrightarrow{\boldsymbol{A}\xi_1}=\vec{0}$，所以(12)式可以化为

$$k_3\boldsymbol{A}^2\overrightarrow{\xi_3}=\vec{0} \tag{13}$$

已知

$$\boldsymbol{A}^2\overrightarrow{\xi_3}=\overrightarrow{\xi_1} \tag{14}$$

(13)式、(14)式相结合，得

$$k_3\overrightarrow{\xi_1}=\vec{0} \tag{15}$$

已知$\overrightarrow{\xi_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，也就是说向量$\overrightarrow{\xi_1}$不是零向量，根据(15)式可知$k_3=0$。代入到(9)式中，可得

$$k_2\overrightarrow{\xi_1}=\vec{0} \tag{16}$$

由于向量$\overrightarrow{\xi_1}$不是零向量，根据(16)式可知$k_2=0$。把$k_2=0$，$k_3=0$代入(1)式，可得

$$k_1\overrightarrow{\xi_1}=\vec{0} \tag{17}$$

由于向量$\overrightarrow{\xi_1}$不是零向量，根据(17)式可知$k_1=0$。

由于$k_1=0$，$k_2=0$，$k_3=0$，所以$\overrightarrow{\xi_1}$、$\overrightarrow{\xi_2}$、$\overrightarrow{\xi_3}$线性无关。

(23)(本题满分11分)

设二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$。

(Ⅰ)求二次型$f$的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ)若二次型$f$的规范形为$y_1^2+y_2^2$，求$a$的值。

**解：**先来看第(Ⅰ)问。

将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$写为矩阵的形式$\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$，为了方便表示，记这个矩阵为矩阵$\boldsymbol{A}$。

第(Ⅰ)问要求的就是矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值。

由于$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以$\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}a-\lambda&0&1\\0&a-\lambda&-1\\1&-1&a-1-\lambda\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}a-\lambda&0&1\\0&a-\lambda&-1\\1&-1&a-1-\lambda\end{vmatrix}$。令$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$，得$(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)=0$，解得$\lambda_1=a$，$\lambda_2=a+1$，$\lambda_3=a-2$。

所以二次型$f$的矩阵的所有特征值为$\lambda_1=a$，$\lambda_2=a+1$，$\lambda_3=a-2$。

再来看第(Ⅱ)问。

二次型$f$的规范形为$y_1^2+y_2^2$，写完整就是$1\times y_1^2+1\times y_2^2+0\times y_3^2$。有的同学由此认为矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值就是1、1、0，这种想法是错误的，因为这是规范形而不是标准形，

而且就算这是标准形，题中也没有说是使用正交变换法化成的，所以千万不要认为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值就是 1、1、0。

这个规范形的系数是两个 1 一个 0，说明标准形的系数肯定是两个正数一个零，即正惯性指数为 2，负惯性指数为 0。对于一个普通的二次型，无论用什么方法把它化成标准形，正负惯性指数都是一样的。所以本题中，如果使用正交变换法将二次型化为标准形，那么正负惯性指数也一定是 2 和 0，所以可以推出矩阵 $A$ 有两个特征值为正数，一个特征值为 0。而在第(I)问中，已经求出了矩阵 $A$ 的三个特征值为 $\lambda_1 = a$，$\lambda_2 = a+1$，$\lambda_3 = a-2$，所以可得 $a = 2$。

# 反侵权盗版声明



举报电话：(010)88254396；(010)88258888

传真：(010)88254397

E－mail：dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路173信箱

电子工业出版社总编办公室

邮编：100036